

Transformée de Fourier discrète de structures musicales

par Emmanuel AMIOT

Lycée François Arago, Perpignan

À l'occasion des célébrations en 2018 de Joseph Fourier, j'ai été cordialement invité par Philippe Patte à témoigner dans le Bulletin Vert de mes recherches sur la DFT de structures musicales, et je l'en remercie chaleureusement. Un certain nombre de membres de l'UPS reconnaîtront une partie de ce qui suit, car j'en avais parlé lors d'un stage UPS organisé par l'IRCAM il y a quelques années.

*La transformée de Fourier est couramment utilisée en théorie du signal, et permet notamment d'identifier les notes jouées dans une pièce de musique à l'aide d'un spectrogramme. En revanche, l'importance des coefficients de Fourier de **structures** musicales (gammes, rythmes, accords) n'a été constatée qu'assez récemment. Il s'avère que les amplitudes d'une part, et les phases d'autre part, de ces coefficients ont des significations musicales précises qui semblent très proches de qualités perceptibles par l'oreille et le cerveau humains, comme par exemple les caractères diatoniques ou chromatiques, ou les diverses tonalités et bien d'autres choses encore.*

La présente étude se cantonne essentiellement aux ensembles de notes modulo octave. Plus de détails et des extensions aux rythmes, à la TF continue, des analyses via Fourier de pièces de musique de tous genres et époques et bien d'autres choses sont référencés dans la bibliographie et en particulier dans mon ouvrage [8] qui décrit l'état de l'art sur le sujet – et démontre la plupart des théorèmes énoncés ici.

J'ai écrit une petite app qui calcule les coefficients de Fourier de tous les accords possibles. Elle n'est pas autonome mais utilise le CDF Player de Wolfram Mathematica™, gratuit; cf. <http://canonsrythmiques.free.fr/MaRecherche/styled/>.

À Jean Pierre Kahane, source d'énergie et d'inspiration pour tous les fans de Fourier. Ses encouragements furent précieux.

Il y a une dizaine d'années, un musicologue reconnu (que je ne nommerai pas ici) a publié une série d'articles qui défendaient la thèse selon laquelle la musique slave du début du XX^e siècle serait "octatonique". Il la justifiait en énumérant des extraits de partitions où les notes utilisées faisaient partie de gammes octatoniques. L'ennui est que – comme d'autres non moins distingués musicologues n'ont pas tardé à le signaler, cf. [19] – de tels critères ensemblistes ne sont guère significatifs : certains groupes de notes appartiennent aussi bien à une gamme octatonique qu'à une gamme diatonique, et tous les accords de six notes ont au moins 80 % de notes communes avec une gamme octatonique.

Comment trancher ? Nous verrons bientôt qu'il est possible de définir clairement et rigoureusement l'"octatonicité" par un nombre réel, le module du quatrième coefficient de Fourier ; et similairement, la diatonicité, la chromaticité, etc. Plus généralement, il s'avère qu'une grande quantité de notions purement musicales correspondent exactement à des valeurs tirées de coefficients de Fourier. Ces derniers sont donc devenus incontournables, tant pour l'analyse de musiques existantes que pour la composition de nouvelles. On peut même supputer que ces coefficients de Fourier seraient directement perçues par le cerveau, puisqu'il est avéré que ce dernier est capable de faire de l'analyse spectrale.

Je vais commencer par rappeler et préciser ce que sont les coefficients de Fourier d'un ensemble de notes modulo octave ('pitch-class set'), mentionner quelques isomorphismes sympathiques (susceptibles de provoquer quelques sujets de problèmes pour nos classes !), puis étudier la signification de grands coefficients ; inversement, la nullité de certains coefficients a une grande importance pour des questions de pavages notamment. Je terminerai par l'étude des phases des coefficients et leur sens musical.

1 Pc-sets, distributions et leurs DFTs

1.1 Distributions

Pour les non-musiciens, il est important de rappeler que notre cerveau est capable de percevoir et reconnaître des notes (au sens de la fréquence fondamentale d'un phénomène vibratoire) **à octave près**, c'est-à-dire qu'après l'analyse spectrale du signal perçu par l'oreille, le cerveau opère une réduction par la relation d'équivalence qui identifie deux fréquences dont le rapport est 2 : dans le duo "*Der, Welcher Wandelt Diese Straße*" de la Flûte enchantée (par exemple, <https://www.youtube.com/watch?v=JX16qMbvbUk>), on entend bien que la basse et le ténor chantent la même note – même si une voix est une octave au-dessus de l'autre.

Comme l'octave est généralement divisée en douze parties égales¹, cela signifie qu'une "note" est modélisable par un élément du groupe cyclique $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, que l'on dénotera par \mathbb{Z}_{12} . Conventionnellement, on aura $Do = 0$, $Do \sharp = 1$, $Ré = 2 \dots Si = 11$ et $Do = 12 = 0$.²

Un accord sera donc une partie de \mathbb{Z}_{12} . Par exemple l'accord parfait de Do majeur est $\{0, 4, 7\}$. Quand on joue cet accord sur un piano, les trois touches correspondantes Do, Mi et Sol sont enfoncées et les autres non : on peut identifier (bijectivement) les parties de \mathbb{Z}_{12} et leurs fonctions caractéristiques.

1. Sans rentrer dans les questions délicates des tempéraments inégaux ou de la microtonalité, dans le cadre de cet exposé. Voir néanmoins [8].

2. Plus tard, par exemple pour l'étude de canons rythmiques, on changera 12 en n'importe quel entier n , qui peut correspondre à la période d'un rythme, ou dans l'espace des hauteurs à une division microtonale de l'octave.

La gamme de Do majeur est l'ensemble $A = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$, sa fonction caractéristique est donc

$$(1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1) \quad i. e. \text{ l'application } \mathbf{1}_A : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

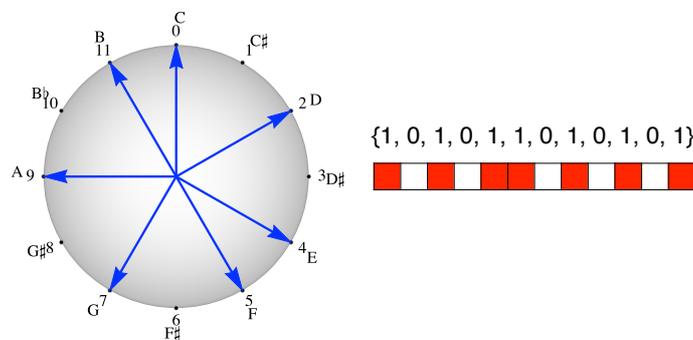


FIGURE 1 – La gamme de Do majeur, comme sous-ensemble de \mathbb{Z}_{12} , et comme fonction caractéristique

Plus généralement, on peut considérer des valeurs différentes de 1, soit que l'on considère des voix multiples, ou une intensité sonore variable, etc. Les fonctions caractéristiques sont alors des cas particuliers de **distributions**, c'est-à-dire des applications de \mathbb{Z}_{12} dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et plus seulement $\{0, 1\}$. On les dénote naturellement par la liste de leurs valeurs $s(k)$ pour $k = 0 \cdots 11$. Un intérêt majeur est que leur espace $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{12}}$ est doué d'une structure d'algèbre, et même de plusieurs comme nous allons le voir. Bien entendu, c'est dans le cadre de cette structure que nous pourrions définir l'automorphisme précieux qu'est la transformée de Fourier discrète. Mais d'abord il importe d'énumérer les opérations qui font sens musicalement.

Une opération simple comme la **transposition** (au sens musical), c'est-à-dire un décalage d'une même quantité de toutes les notes d'un accord, s'exprime par **translation modulo 12** sur l'ensemble, et par un **shift** sur la distribution. Par exemple, la gamme de Do majeur ou $\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$ transposée d'une quinte donne

$$\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\} + 7 = \{0, 2, 4, 6, 7, 9, 11\} \pmod{12}$$

autrement dit $(1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$ devient $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$.

Quel sens musical possèdent les opérations naturelles dans l'algèbre des distributions (engendrée par les fonctions caractéristiques)? La somme ressemble fort à l'opérateur \cup (réunion), mais il y a un piège : cela n'est vrai que pour des accords disjoints. Ainsi la réunion des accords de Do majeur et de Ré mineur fait

$$\{0, 4, 7\} \cup \{2, 5, 9\} = \{0, 2, 4, 5, 7, 9\} \quad i. e.$$

$$(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) + (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0) = (1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0),$$

mais en ajoutant ainsi les accords de Do et Fa majeur on doublerait le Do :

$$(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) + (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0) = (2, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0).$$

Ceci peut faire sens, dans l'espace ces distributions, avec le 2 qui signifie que la note Do est redoublée (ou jouée deux fois plus fort, etc.).

Par ailleurs, le **produit terme à terme** a un sens évident pour des fonctions caractéristiques : il correspond à l'intersection des parties.

Ainsi, par exemple, le produit des gammes de Do et La \flat majeur donne

$$(1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1) \times (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0) = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0),$$

c'est-à-dire {0, 5, 7} ou (Do, Fa, Sol). Cette opération est particulièrement intéressante pour des figures rythmiques, quoique Y. Xenakis s'en soit abondamment servi dans le domaine des hauteurs. Cependant, ce n'est pas encore la multiplication la plus pertinente pour l'étude des structures musicales.

Pour introduire cette dernière, revenons à l'addition, mais à une addition **algébrique**. En 2010, Bill Sethares a posé la question suivante : est-ce qu'une gamme mineure (par exemple, Do mineur = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)) peut s'écrire comme combinaison algébrique de gammes majeures ? La solution est assez simple (j'engage la lectrice curieuse à la chercher par elle-même, sachant qu'il faudra rajouter Mi et La \flat et annuler les notes redoublées). Le problème général s'étudie bien avec les matrices que j'introduirai plus bas, cf. [7]. Elle est donnée par la Fig. 2, on peut l'exprimer comme

$$\text{Do mineur} = \text{Do majeur} + \text{Mi}\flat \text{ mineur} - \text{Fa majeur}.$$

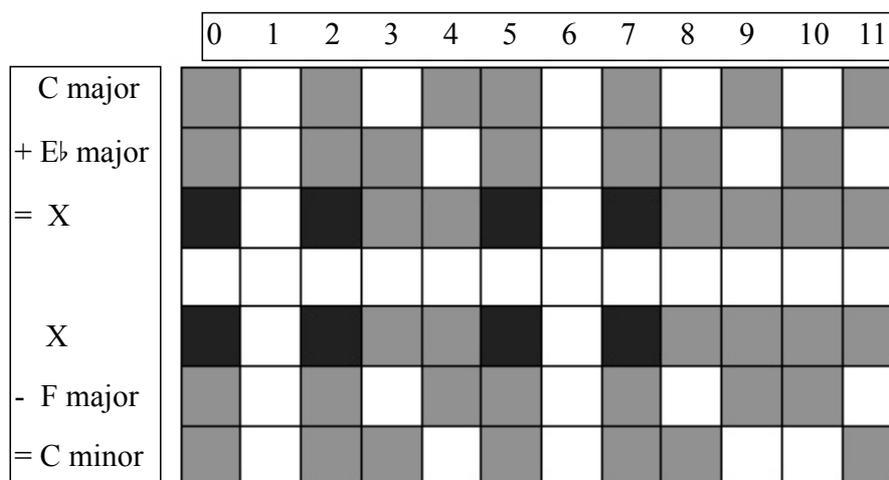


FIGURE 2 – Somme algébrique de gammes [C = Do, F = Fa, etc.]

Mais compte tenu de ce que les trois termes de cette addition sont des copies (à rotation près) de la même gamme de Do majeur, il suffirait de préciser de combien on transpose la gamme, et si on ajoute ou retranche la gamme transposée. On fait ainsi apparaître une distribution algébrique, (1, 0, 0, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) (où par exemple le -1 correspond à la soustraction de Fa majeur, *i. e.* de Do majeur décalé de 5). On aurait envie d'exprimer cela par une loi de composition interne :

$$(1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1) = (1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1) \star (1, 0, 0, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

et, de fait, cette loi est bien connue, c'est le **produit de convolution** dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{12}}$.

Définition 1.

Le produit de convolution de deux distributions $s, t : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$ est la distribution définie par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}_n \quad s \star t(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} s(k)t(x-k).$$

(Multiplier les éléments des deux listes, en ordre inverse, décalant au départ de x .)

Dans le cas basique où s, t sont des fonctions caractéristiques, la définition se simplifie :

$$\mathbf{1}_A \star \mathbf{1}_B(x) = \#\{k \mid k \in A \text{ et } x - k \in B\}.$$

Je conseille aux lecteurs d'essayer cette opération – fondamentale en théorie musicale – sur les accords de leur choix, calculant $\mathbf{1}_A \star \mathbf{1}_B$, $\mathbf{1}_A \star \mathbf{1}_{-B}$ et $\mathbf{1}_A \star \mathbf{1}_{-A}$ pour des accords A, B arbitraires. Que signifient ces *distributions convoluées*?

- $\mathbf{1}_A \star \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A+B}$ décale les éléments de A par tous ceux de B . C'est ce que P. Boulez a appelé *produit d'accords*. Ils nous seront utiles dans l'étude des pavages.
- $\mathbf{1}_A \star \mathbf{1}_{-B} = \text{IFunc}(A, B)$ est la **fonction intervallique**. Elle mesure le nombre d'occurrences d'un intervalle donné entre A et B .
- $\mathbf{1}_A \star \mathbf{1}_{-A} = \text{IFunc}(A)$ (distribution intervallique) est un cas particulier qui mesure la fréquence d'occurrence d'un intervalle donné à l'intérieur de A (c'est la structure interne de A , appelée **interval vector** dans la théorie d'Allen Forte). Certains verront dans cette fonction l'**autocorrélation de A** .

Cette opération est bien plus fréquente qu'on ne le croirait. Le dernier cas (IFunc) est carrément une donnée perceptive (interaction entre, par exemple, deux instruments jouant respectivement A et B), et même le produit d'accords est un procédé de construction omniprésent.³

Dans [22], Jason Yust donne l'exemple du *Satz für Streichquartett* de A. Webern, où presque tous les sous-motifs sont des produits d'accords.

Un exemple plus tonal se trouve dans l'étude "pour la main gauche"⁴ de Chopin (cf. Fig. 3), où le motif de triples croches en main gauche est le produit de l'accord joué à la main droite (Sol # mineur) par un demi-ton en-dessous, ce qui superpose les accords de Sol # mineur et Fa ## mineur.



FIGURE 3 – DFT d'un produit de convolution de pc-sets

3. Je n'ai pas dit que cela est fait consciemment par les compositeurs!

4. La droite travaille aussi! J'en ai posté une version à l'adresse http://manu.amiot.free.fr/Musiques/Chopin_25_7.flac, le passage cité est vers 2'09".

En revenant à la théorie en vogue au Moyen-Âge, même la basique gamme diatonique Do Ré Mi Fa Sol La Si (alors dite ‘heptactys’) est une superposition de deux tétracordes (‘tetractys’), Do Ré Mi Fa \cup Fa Sol La Si [d’accord, la note commune “Fa” est redoublée]. Cette construction remonte à Pythagore, mais elle est encore aujourd’hui la base des *maqams* (gammes) utilisées au Proche et Moyen Orient.

Le fait que l’auto-corrélation décèle les régularités d’un objet nous incite à considérer l’outil idéal pour cette recherche de périodicités : la DFT.

1.2 DFT (Transformée de Fourier Discrète)

Définition 2. La DFT d’une distribution $s : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$ est la distribution

$$\widehat{s} : x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} s(k) e^{-2ikx\pi/n}.$$

Ses valeurs $\widehat{s}(x)$, avec $x = 0 \dots n - 1 \in \mathbb{Z}_n$, sont les *coefficients de Fourier*. Ils permettent d’exprimer la distribution originale comme combinaison de fonctions exponentielles périodiques [les parties réelles et imaginaires étant des sinusoides] :

$$s(k) = \frac{1}{n} \sum_{t \in \mathbb{Z}_n} \widehat{s}(t) e^{+2ikt\pi/n} \quad (\text{transformée de Fourier INVERSE}).$$

N. B. : D’autres conventions existent. Il est probable que les signes inverses (utilisés notamment par J. Yust dans ses excellentes analyses, cf. [20, 21, 22, 23]) prévalent à l’avenir, car il y a alors un rapport direct entre les phases et les notes, cf. la partie 6.

Pour un accord, la DFT est celle de sa fonction caractéristique, *i. e.*

$$a_k = \mathcal{F}_A(k) = \sum_{x \in A} e^{-2ikx\pi/n}.$$

Quelques exemples

1. Pour une dyade [deux notes], disons une tierce mineure $A = \{0, 3\}$, il vient

$$\mathcal{F}_A = \{2, 1 - i, 0, 1 + i, 2, 1 - i, 0, 1 + i, 2, 1 - i, 0, 1 + i\}.$$

Il est préférable d’utiliser la représentation ‘en horloge’ pour toutes ces exponentielles, qui sont des vecteurs coplanaires à additionner (notez la symétrie qui permet de se passer des cinq derniers), cf. la Fig. 4.

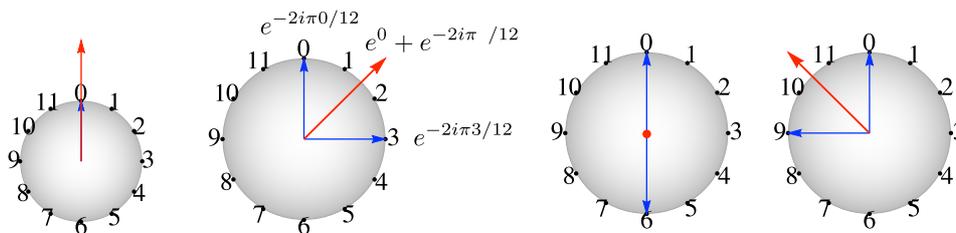


FIGURE 4 – Calcul de quelques coefficients de Fourier de $\{0, 3\}$. a_0 donne le cardinal.

2. Pour la septième diminuée $S = \{0, 3, 6, 9\}$, la plupart des coefficients sont nuls et les autres valent 4 [quand l'indice x est multiple de 4] :

$$\mathcal{F}_S(x) = \sum_{k=0}^3 e^{2i\pi \times 3kx/12} = \sum_{k=0}^3 (e^{ik\pi/2})^x = 1 + i^x + (-1)^x + (-i)^x.$$

3. Les coefficients de Fourier du **triton** $\{0, 6\}$ alternent entre 0 et 2.
4. Important : si l'accord est 'transposé', *i. e. translaté* : $A \mapsto A + k$, tous les coefficients de Fourier sont multipliés par une $e^{-2ik\pi x/n}$, *i. e. subissent une rotation*. De même, **l'inversion** de A (*i. e.* changer Do Maj = $\{0, 4, 7\}$ en $\{0, -4, -7\} = \{0, 8, 5\} =$ Fa min) change les coefficients en leurs conjugués. On retrouve le groupe diédral agissant sur \mathbb{Z}_{12} , *i. e.* les applications $t \mapsto t + k$ ou $k - t$.

Ces deux types de transformations ne changent que la **direction** (la phase) de la DFT, pas la **longueur** des vecteurs (= leur module). Ceci suggère que direction et magnitude des coefficients jouent des rôles indépendants et très différents, et c'est bien ce qui va se produire. La raison majeure de l'intérêt de la DFT en théorie musicale n'est pas la décomposition en somme de sinus, ou plus généralement en composantes périodiques, mais tient probablement en le résultat classique suivant.

Théorème 1. *La DFT d'un produit de convolution est le produit terme à terme des DFTs :*

$$\forall x \in \mathbb{Z}_n \quad \widehat{s \star t}(x) = \widehat{s}(x) \times \widehat{t}(x). \quad (1)$$

(Je ne le redémontre pas, c'est élémentaire dans le cas de la FT discrète.) En particulier,

$$\widehat{\text{Func}(A)} = \mathcal{F}_A \times \mathcal{F}_{-A} = \mathcal{F}_A \times \overline{\mathcal{F}_A} = |\mathcal{F}_A|^2.$$

Cela donne un sens précis au module des coefficients de Fourier : leur donnée est exactement équivalente (par DFT inverse) à celle du contenu intervallique, c'est-à-dire à la structure interne de l'ensemble étudié. Les physiciens auront certainement reconnu l'amplitude lumineuse d'une figure de diffraction, l'équivalent analogique de la TF, et qui ne dépend que de la "forme des trous" dans le solide (par exemple un cristal) diffracté. On pourrait penser que cela caractérise le solide (ou pour nous, l'accord) à isométrie près, mais c'est faux comme nous l'évoquerons dans la section 5.

À noter la formule la plus générale $\widehat{\text{Func}(A, B)} = \mathcal{F}_A \times \overline{\mathcal{F}_B}$. Elle donne très simplement la DFT d'un "produit d'accords".

La formule (1) est sûrement la raison de la 'déraisonnable efficacité' de la DFT en théorie de la musique : l'opération compliquée \star devient \times qui est bien plus simple. Ceci n'est pas sans rappeler les logarithmes, qui changent les longues (à la main) multiplications en de simples additions (essentiellement une opération qui se fait chiffre par chiffre).

De plus, la DFT est – essentiellement – l'unique transformation qui jouisse de cette propriété.

Théorème 2. *À permutation près, la DFT est le seul automorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$ qui transforme \star en \times .*

Voir la démonstration complète du Thm 1.11 dans [8]. Elle repose sur le lemme suivant qui est du niveau de nos classes.

Lemme 1. *Tout automorphisme de l'algèbre $(\mathbb{C}^n, +, \cdot, \times)$, où \times désigne le produit terme à terme, est une permutation des vecteurs de la base canonique.*

En termes musicaux, c'est seulement en considérant les coefficients de Fourier que l'on peut directement (linéairement) apprécier comment les différentes voix musicales interagissent.

1.3 Cas particuliers

On le sait peu, mais beaucoup de gammes ou d'accords importants sont en fait des progressions arithmétiques (modulo 12). Par exemple, la gamme de Do majeur est une progression de raison 7 et d'origine 5 (les autres gammes majeures, dites diatoniques, s'en déduisent par translation) :

$$\{5, 12, 19, 26, 33, 40, 47\} = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\} \pmod{12}.$$

De même pour la gamme par tons, octatonique, pentatonique, divers rythmes périodiques, etc. Dans le cas d'une telle **gamme monogène**, les coefficients de Fourier sont donnés par le calcul suivant.

Lemme 2.

$$1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{(d-1)i\theta} = \frac{\sin(\frac{d\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} e^{(d-1)i\theta/2}.$$

Théorème 3. *Les coefficients de Fourier de $A = \{0, f, 2f, \dots, (d-1)f\} \subset \mathbb{Z}_n$ – la gamme engendrée par f ayant d éléments – valent*

$$\mathcal{F}_A(x) = \frac{\sin(\frac{dx f \pi}{n})}{\sin(\frac{x f \pi}{n})} e^{-(d-1)fx\pi/n}.$$

Cas particulier : si $\sin(\frac{x f \pi}{n}) = 0$ alors la somme vaut d .

L'amplitude des coefficients d'une telle gamme/rythme est donc donnée par un **noyau de Dirichlet** $\frac{\sin(du)}{\sin u}$, bien connu en théorie du signal [c'est parce qu'il approxime un Dirac quand $d \rightarrow +\infty$ que les séries de Fourier convergent vers le signal de départ].

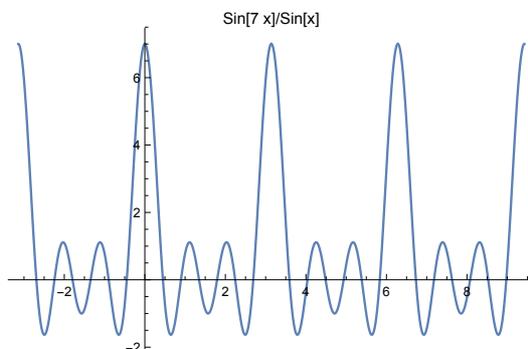


FIGURE 5 – Un noyau de Dirichlet se concentre autour de l'origine

On voit que cette fonction dépend du **produit** du cardinal d et du générateur f . De fait, il existe une relation étonnante entre les coefficients de Fourier d'une gamme monogène et la gamme chromatique ayant la même valeur de fd , découverte par P. Beauguitte [10].

Théorème 4 (Beauguitte 2011).

Si $kf = 1 \pmod n$, avec $0 < f < n$, alors les transformées de Fourier de la séquence chromatique $C_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ de longueur k , et de la gamme monogène $D = \{0, -k, -2k, \dots, -(f-1)k\}$ de longueur f et générateur $-k$ sont inverses :

$$\forall x \in \mathbb{Z}_n, x \neq 0 \quad \mathcal{F}_{C_k}(x) = \frac{1}{\mathcal{F}_D(x)}.$$

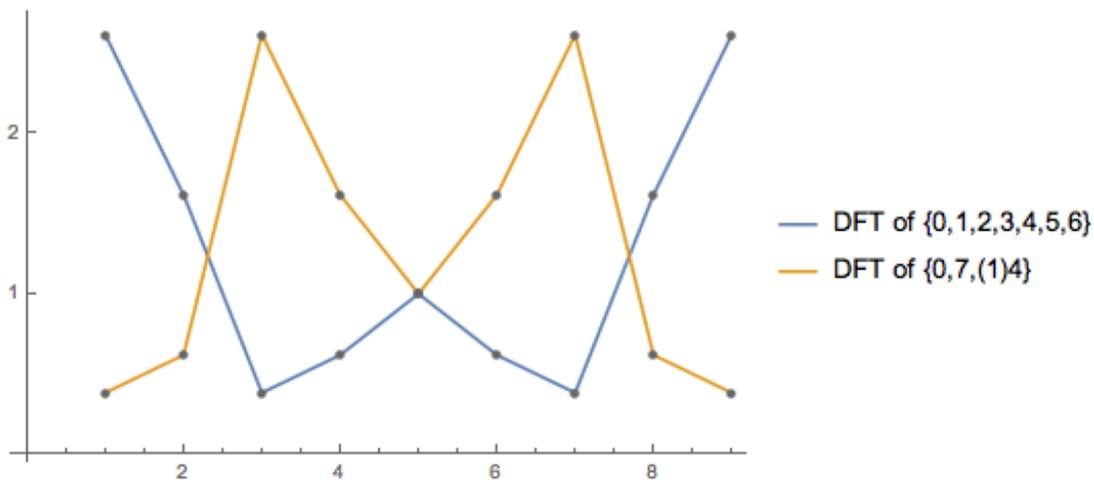


FIGURE 6 – Coefficients de Fourier inverses pour des gammes monogènes dans \mathbb{Z}_{10}

Ces gammes monogènes sont, d'une certaine façon, aussi périodiques que possible pour un cardinal d donné (avec la période f), ce qui explique largement qu'on puisse les caractériser par la maximalité d'un coefficient de Fourier comme nous le verrons dans la section 3.

1.4 Réunions d'accords (sommes de fonctions caractéristiques)

Par définition, la DFT est linéaire. Ceci permet souvent de calculer quasiment de tête les coefficients de Fourier. Considérons par exemple $B = \{0, 2, 3, 5\}$: c'est la réunion de $C = \{0, 3\}$ et de $C + 2$.

La DFT de C est facile (on peut utiliser la formule pour les gammes monogènes!) et on en déduit celle de $C + 2$ en multipliant par $e^{-2i\pi x/12} = e^{-i\pi x/3}$. Il n'y a plus qu'à ajouter (vectoriellement) les deux.

Comme la DFT de l'ensemble chromatique [*i. e.* l'application constante valant 1] est

$$1 + e^{-2ix\pi/n} + e^{-2ix \times 2\pi/n} + \dots + e^{-2ix\pi(n-1)/n} = \frac{e^{-2in\pi/n} - 1}{e^{-2i\pi/n} - 1} = 0$$

sauf en $x = 0$, on en déduit facilement le magnifique

Théorème 5 (de Babbitt ou de l'hexacorde).

La DFT du complémentaire est l'opposée de la DFT [sauf en l'indice 0, car le 0^e coefficient est le cardinal]. En particulier, modulo 12, tout hexacorde (accord de six notes) et son complémentaire ont la même distribution intervallique, i. e.

$$\text{IFunc}(H) = \text{IFunc}(\mathbb{Z}_{12} \setminus H).$$

Ceci est généralement considéré comme le premier théorème digne de ce nom en théorie musicale (M. Babbitt, 1959). Il existe une version continue valide dans tout groupe compact, cf. [2]. Si l'on traduit à nouveau 'DFT' par 'figure d'interférence', les physiciens auront reconnu le théorème de Babinet.

Comme l'a noté J. Yust [23], ceci peut se généraliser à une réunion d'accords, car si $B = A \cup A' \cup A'' \cup \dots$ alors

$$|\widehat{b}_k| = |\widehat{a}_k| \cos(\varphi_{b_k} - \varphi_{a_k}) + |\widehat{a}'_k| \cos(\varphi_{b_k} - \varphi_{a'_k}) + \dots$$

où φ_{c_k} dénote la direction (phase) du coefficient de Fourier $c_k = \mathcal{F}_C(k)$. On voit ici que les coefficients se renforcent mutuellement quand leurs directions sont proches (le cos est proche de 1) mais peuvent se détruire si leurs directions sont opposées ($\cos \approx -1$). C'est le nœud de la section 3 qui étudie les ensembles donnant des coefficients de Fourier maximaux.

2 Isomorphismes

Cette section n'est pas indispensable pour profiter des avantages de la DFT, mais elle tisse des liens historiquement fructueux avec des notions algébriques qui sont bien connues dans nos classes. J'ai choisi d'en faire un bref panorama à l'intention de ceux qui souhaiteraient en faire des sujets d'exercices ou de problèmes!

2.1 Polynômes

Historiquement, les problèmes de pavage, qui seront évoqués dans la section 4, ont été d'abord traités à l'aide de polynômes. C'est seulement depuis une quinzaine d'années qu'on les formule (et résout, parfois) en termes de DFT.

Il est naturel d'associer à un sous-ensemble de \mathbb{Z}_n un **polynôme caractéristique**.

Définition 3. Le **polynôme caractéristique** (ou *polcar* pour les intimes) de $A \subset \mathbb{Z}_n$ est

$$\mathbf{A}(X) = \sum_{k \in A} X^k.$$

C'est un élément de l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/(X^n - 1)$.

En effet, les exposants k sont définis modulo n . Cet anneau est nœtherien, n'est pas intègre (cela sera capital pour les questions de pavage) et se plonge naturellement dans l'algèbre $\mathbb{R}[X]/(X^n - 1)$ ou $\mathbb{C}[X]/(X^n - 1)$ dont⁵ les lois font agréablement sens musicalement parlant.

5. Un élément de cette algèbre est un polynôme $\sum s(k)X^k$ qui s'identifie à la distribution s .

Proposition 1.

Le polcar de la réunion [disjointe] $A \cup B$ est la somme des polcars $\mathbf{A}(X) + \mathbf{B}(X)$.

Le polcar d'un produit d'accords $A \oplus B$ est le produit des polcars $\mathbf{A}(X) \times \mathbf{B}(X)$.

Par exemple pour le passage de Chopin utilisant $\{11, 0\} \oplus \{3, 8, 11\}$ on a le polcar

$$X^2 + X^3 + X^7 + X^8 + X^{10} + X^{11} = (X^{11} + X^0) \times (X^3 + X^8 + X^{11}) \pmod{(X^{12} - 1)}.$$

On peut aussi facilement faire intervenir les symétries du groupe cyclique \mathbb{Z}_n , par exemple le polcar d'une inversion $k - A$ de l'ensemble A est le polynôme réciproque de $\mathbf{A}(X)$ [en prenant $k =$ le degré de \mathbf{A} pour bien faire]. Ainsi, on retrouve que l'inverse d'un accord parfait majeur est un accord mineur :

$$\{0, 4, 7\} \mapsto \mathbf{A}(X) = 1 + X^4 + X^7 \mapsto X^7 \mathbf{A}(1/X) = X^7 + X^3 + 1 \mapsto \{0, 3, 7\}.$$

Je laisse aux lecteurs le plaisir de traduire la transposition des accords en polcars.

On peut même étudier ainsi la fonction intervallique par son polcar, elle s'appelle dans ce cas la *fonction de Patterson* dans le contexte d'étude de l'homométrie, cf. section 5 et [2].

On constate que les 'lois de composition' des accords se traduisent de façon identique (addition, multiplication) pour les polcars et pour la DFT. Cela est bien suspect, mais s'explique par le

Théorème 6. L'application $P \mapsto (P(1), P(e^{-2i\pi/n}), \dots, P(e^{-2ik\pi/n}), \dots, P(e^{-2i(n-1)\pi/n}))$ est un isomorphisme de l'algèbre $\mathbb{C}[X]/(X^n - 1)$ dans $(\mathbb{C}^n, +, \cdot, \times)$. Elle envoie le polcar de A sur sa DFT.

L'isomorphisme réciproque s'obtient tout bonnement par interpolation de Lagrange.

Le paradigme polynomial est essentiel pour de nombreux contextes, notamment ceux des pavages, et il permet de comprendre comment la théorie de Galois va jouer un rôle aussi majeur qu'inattendu pour des questions musicales, cf. section 4 et plus généralement [9].

2.2 Matrices circulantes

Revenons aux distributions, ces n -vecteurs qui généralisent les fonctions caractéristiques. L'algèbre de ces distributions utilise le produit de convolution, qui n'est pas une chose simple. J'avais remarqué il y a quelques années qu'on peut en faire une représentation linéaire de façon standard, en associant à toute distribution s l'opérateur linéaire 'convolver avec s ' :

$$s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n} \mapsto (g \mapsto s \star g) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}),$$

et pensé que cela était aussi joli qu'inutile. En fait, cette représentation est devenue essentielle pour le travail que nous avons fait avec William Sethares sur les combinaisons algébriques de gammes [7] et elle est agréable pour l'étude de l'homométrie. Plus spécifiquement, on voit que le produit de convolution par un vecteur de la base canonique réalise un 'shift' sur une distribution quelconque, et on a donc l'isomorphisme suivant.

Théorème 7. L'application qui à toute distribution s associe la matrice dont la première colonne est donnée par les valeurs de s , la seconde par les mêmes valeurs décalées d'un rang, etc., est un isomorphisme de l'algèbre $(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}, +, \cdot, \star)$ dans l'algèbre C_n des matrices circulantes.⁶

6. Cette algèbre, commutative, est celle des polynômes en la matrice J qui permute circulairement d'un cran les vecteurs de la base canonique.

En particulier le produit de convolution est transformé en produit de matrices. Par exemple,

la matrice associée à l'ensemble $\{1, 2\} \subset \mathbb{Z}_3$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ce formalisme permet notamment de résoudre le **problème de Lewin** : connaissant $B \subset \mathbb{Z}_n$ et $\text{IFunc}(A, B)$, peut-on retrouver $A \in \mathbb{Z}_n$? On vérifie que la matrice circulante associée à $\text{IFunc}(A, B)$ est celle de A fois la transposée de celle de B , et il suffit de multiplier par l'inverse de cette dernière pour récupérer la matrice de A , et donc $\mathbf{1}_A$ que l'on pourra lire sur la première colonne. D'autres problèmes musicaux se résolvent ainsi élégamment par des matrices circulantes.

On comprend facilement comment cette nouvelle algèbre va se trouver isomorphe à la précédente (polynômes), laquelle est isomorphe à celle des valeurs de la DFT. Quel est alors la composée de ces deux isomorphismes? C'est un isomorphisme délicieux.

Théorème 8. Soit \mathcal{S} la matrice circulante associée à une distribution s . La DFT de s n'est autre que la séquence des valeurs propres de \mathcal{S} , associées aux vecteurs propres [indépendants de s] $V_j = {}^T(1, e^{2ij\pi/n}, e^{2 \times 2ij\pi/n}, \dots, e^{2ij\pi/n}, \dots, e^{2ij(n-1)\pi/n})$, avec $j = 0 \dots n-1$.

Cette diagonalisation simultanée des matrices circulantes est un exercice classique dans nos classes, même si les valeurs propres sont rarement reconnues comme des coefficients de Fourier.

On comprend alors bien pourquoi, par exemple, le problème de Lewin n'a pas de solution quand il existe une valeur propre nulle, ce qui est équivalent à avoir une matrice singulière.⁷

Il existe donc de nombreuses algèbres qui permettent de modéliser les distributions de notes [dans l'espace des hauteurs comme dans celui des rythmes]. Même si elles sont toutes isomorphes, souvent de façon intéressante, pour un problème donné il en existe une 'plus isomorphe que les autres' pour paraphraser G. Orwell.

3 Caractères saillants

Cette section précise la signification des modules des coefficients de Fourier, notamment quand ce module est maximal. Nous prouverons qu'ils déterminent le caractère [au moins localement] d'un morceau de musique.

3.1 Cas triviaux

La DFT d'un accord a parfois un maximum évident :

$$|\mathcal{F}_A(x)| = \left| \sum_{k \in A} e^{-2i\pi xk/n} \right| \leq \sum_{k \in A} |e^{-2i\pi xk/n}| = \sum_{k \in A} 1 = \#A$$

qui est atteint quand A est un **polygone régulier**, un cas particulier de la formule du Thm. 3. La réciproque est vraie.

Théorème 9. Soit d un diviseur de n , et $A \subset \mathbb{Z}_n$ ayant d éléments, alors $|\mathcal{F}_A(d)| = d \iff A$ est un polygone régulier, i. e. un translaté de $\{0, n/d, 2n/d, \dots\}$.

7. J'ai néanmoins proposé une solution à ce problème quand il n'y a qu'une valeur propre nulle, dans [8] 2.2.2.

Ceci résulte essentiellement de ce que, pour deux complexes a, b , on a $|a + b| = |a| + |b| \iff a, b$ ont la même direction.

Par exemple, les septièmes diminuées sont **caractérisées** (parmi les tétrachordes) par l'égalité $|\mathcal{F}_A(4)| = 4$, les gammes par tons par $|\mathcal{F}_A(6)| = 6$, etc.

Quid maintenant du cas où d ne divise pas n ?

Lemme 3. $|\mathcal{F}_A(d)|$ est maximal [pour les A ayant d éléments] $\iff |\mathcal{F}_{dA}(1)|$ est maximal.

Attention! dA peut être un **multiensemble**; par exemple, si $A = \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10\}$ alors $8A = \{0, 0, 0, 0, 4, 4, 4, 4\}$. Mais quand d et n sont premiers entre eux, $x \mapsto d \times x$ est bijective dans \mathbb{Z}_n , et on est ramené à chercher quand une somme de $e^{-2i\pi k/n}$ **distincts** est maximale. Par projection, on montre que cette somme augmente quand les exponentielles sont "reserrées", comme on le voit sur la Fig. 7.

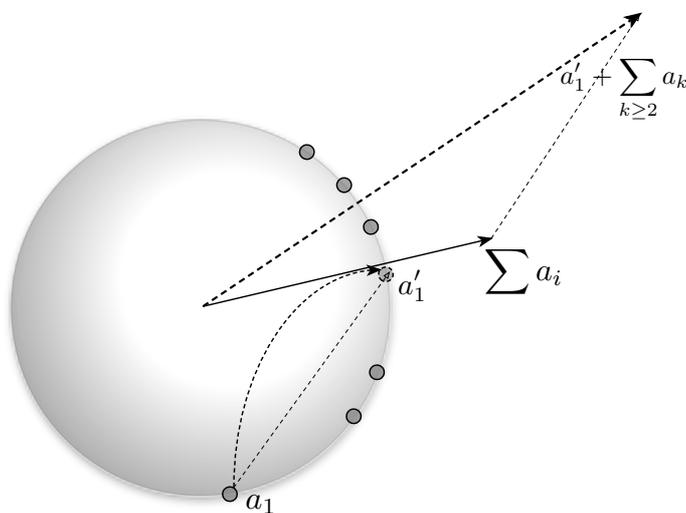


FIGURE 7 – La somme augmente quand $a_1 \mapsto a'_1$

(Essentiellement, ceci se montre par la décroissance de la fonction \cos sur $[0, \pi]$.)

Par itération, on rend donc une telle somme $\sum_{k \in dA} e^{2ik\pi/n}$ maximale quand tous les indices k sont consécutifs, sans laisser de trou, disons $dA = (0, 1, 2, \dots, d-1)$.

Dans le cas où $d \wedge n = 1$, il existe un inverse de d modulo n , i. e. f tel que $fd = 1 \pmod n$. Alors les éléments de $A = 1A = fdA$ valent $f \times (0, 1, 2, \dots, d-1) = (0, f, 2f, \dots)$, ce qui prouve le fondamental

Théorème 10 (Ian Quinn, 2005).

Si d est premier avec n , le maximum de $|\mathcal{F}_A(d)|$ parmi les ensembles à d éléments est atteint quand A est engendré par l'inverse⁸ (multiplicatif) f de d modulo n .

Les gammes pentatoniques et diatoniques sont engendrées par 5 et 7, ce sont donc **les** solutions pour $d = 5, 7$ (quand $n = 12$).

8. Noter que $-f$ est aussi un générateur, en partant de la fin de la séquence. Plus généralement, il peut exister un grand nombre de générateurs distincts pour une séquence arithmétique dans \mathbb{Z}_n , quoique ce nombre ne puisse jamais prendre des valeurs comme 14, cf. [4].

Les rythmes de tresillo et cinquillo sont aussi caractérisées par $\mathcal{F}_A(3)$ maximal : $\{0, 3, 6\} \subset \mathbb{Z}_8$ est engendré par $f = 3$ et a $d = 3$ éléments, or $3 \times 3 = 1 \pmod 8$. Idem pour $\{0, 2, 4, 5, 7\}$ (engendré par 5).

Dans le Thm. 10, on a la condition $df = 1 \pmod n$. Dans le cas d'une division parfaitement régulière, on aurait $df = 0$, 1 est la valeur la plus proche : en ce sens, la solution peut être vue comme **la plus proche d'une division en d parties égales**. Et effectivement, la gamme diatonique est aussi proche que possible d'une division de l'octave en 7 : si on arrondit aux valeurs entières $\left\lfloor \frac{12k}{7} \right\rfloor$, $k = 1..7$, on trouve en effet $\{1, 3, 5, 6, 8, 10, 12 = 0\}$ qui est la gamme de Ré \flat majeur (en changeant le point de départ on peut trouver **toutes** les gammes majeures). Ceci est général.

Définition 4 (Clough, Meyerson, Douthett & alii).

Les 'Maximally Even Sets' (ME sets) ou "Gammes Bien réparties" [12] sont des d -ensembles aussi proches que possible des divisions régulières de \mathbb{Z}_n .

Ils sont produits par $J(k) = \left\lfloor \frac{nk+\alpha}{d} \right\rfloor \pmod n$, $k = 0, 1 \dots d-1$.

On peut s'étonner qu'il ait fallu si longtemps pour découvrir la caractérisation suivante [18, 5].

Théorème 11 (Quinn 2005, Amiot 2007).

Les ME sets sont les ensembles à d éléments qui maximisent $|\mathcal{F}_A(d)|$.

Je n'ai pas exposé ici le cas le plus technique où d n'est pas un diviseur de n mais pas non plus un générateur de \mathbb{Z}_n , ce qui est le cas par exemple de la gamme octatonique $\{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10\}$.⁹

Quinn est **parti** de ces ME sets parce qu'ils sont prééminents culturellement : dans le cas de \mathbb{Z}_{12} ce sont les septièmes diminuées, les gammes pentatonique, diatonique, octatonique et les gammes par tons.

On en déduit sans supplément de prix que le complément d'un ME Set est aussi un ME set (puisque $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_{12} \setminus A}(d) = -\mathcal{F}(d)$). Comme les deux ont les mêmes générateurs (au signe près) on a même le curieux

Théorème 12 (de Chopin).

Tout ME set, à transposition près, est inclus dans son complémentaire (ou l'inverse)!

Le nom de ce théorème provient de l'*Étude n° 5 op. 10* où la main droite joue les cinq touches noires, qui font partie d'une gamme diatonique jouée à la main gauche, qui est elle-même transposée des sept touches blanches. Le résultat était déjà connu de [12].

3.2 Distributions plates

Les ME sets, étant monogènes, donnent la part du lion à un intervalle générateur et peu de place aux autres intervalles : par exemple, quand $A = \{0, 2, 5, 7, 9\}$ (pentatonique), la distribution intervallique est maximale en quarts et quintes (5 et 7) mais pauvres en tierces ou secondes (2, 3, 4) :

$$\text{IFunc}(A) = (5, 0, 3, 2, 1, 4, 0, 4, 1, 2, 3, 0).$$

9. Dite "demi-diminuée" en Jazz notamment.

On peut au contraire chercher une répartition aussi **plate** que possible en intervalles. Dans \mathbb{Z}_{12} une solution est $A = \{0, 1, 4, 6\}$, où tous les intervalles apparaissent une fois et une seule – sauf le triton (6), car $6 - 0 = 0 - 6$ ce qui lui impose deux occurrences. Pour n quelconque, il existe (parfois) des Difference Sets ayant une telle distribution égale de tous les intervalles. Le plus simple est $\{1, 2, 4\} \subset \mathbb{Z}_7$ qu'on appelle un "(7, 3, 1) difference set" (trois éléments parmi sept, chaque différence apparaissant une fois). Une définition rigoureuse de 'plate' serait que l'on exige $\text{IFunc}(A)(k) = \text{constante}$ – pour $k \neq 0$.

Une construction très simple donne des distributions plates : prendre les différences entre tous les carrés modulo un nombre premier p de la forme $4k - 1$ et retirer 0. On retrouve ainsi l'exemple ci-dessus. Noter que son graphe complet est le plan de Fano (les arêtes donnent les intervalles).

Je n'ai pas trouvé trace du théorème suivant dans la littérature mais il devrait être déjà connu vu sa relative simplicité (ma première preuve utilisait des matrices unitaires mais il y a plus direct).

Théorème 13 (Amiot 2011). $\text{IFunc}(A)$ est plate si et seulement si $|\mathcal{F}_A|$ est plate.

Un sens est trivial : supposons

$$\text{IFunc}(A) = (m, s, s, s, \dots, s) = (m - s, 0, 0, \dots, 0) + (s, s, \dots, s),$$

alors par linéarité la DFT de $\text{IFunc}(A)$ est plate, or c'est $|\mathcal{F}_A|^2$.

Ces ensembles étendent le principe de Schönberg d'homogénéité des douze notes au champ des intervalles. En ce sens, ils présentent un intérêt certain pour les compositeurs du XX^e siècle ; par exemple, Elliot Carter a utilisé $A = \{0, 1, 4, 6\}$ et $\{0, 1, 3, 7\}$ dans ses quatuors.

3.3 La diatonicité et autres caractères

On a vu que $|a_5|$ est maximal parmi les accords de cinq ou sept notes quand on a une gamme diatonique, plus généralement (par continuité) c'est le meilleur indicateur de la 'diatonicité', c'est-à-dire du caractère tonal d'un passage de musique (le très récent article [6] explique en détail pourquoi cet estimateur est supérieur à toutes les autres mesures de diatonicité).

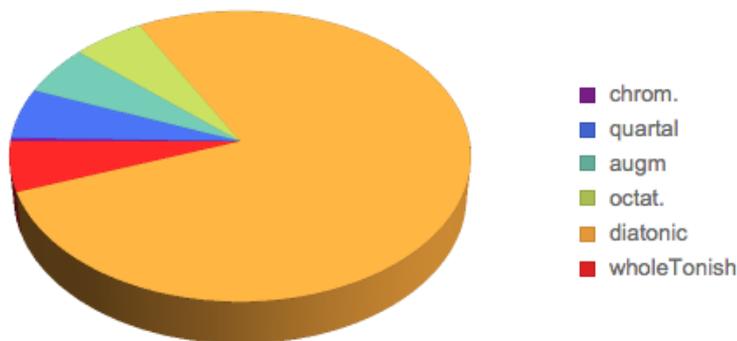


FIGURE 8 – Diatonicité maximale chez Mozart

Par exemple, dans les quatre premières mesures de la *Sonata Facile* de Mozart, on a toutes les notes de Do majeur. La valeur de $|a_5|$ est donc $2 + \sqrt{3} \approx 3.73$, qui n'est battu parmi *tous* les 4095 accords (!) que par l'hexacorde de Guidoni (Do Ré Mi Fa Sol La) pour lequel $|a_5| = \sqrt{2} + \sqrt{6} \approx 3.86$, on est donc dans un contexte on ne peut plus tonal (diatonique). Comme on le voit sur la Fig. 8, le caractère diatonique écrase tous les autres.

De même, et fort utilement, on calculera rigoureusement l'octatonicité par $|a_4|$, qui est maximal pour des septièmes diminuées [ou réunions d'icelles], la 'gamme-par-tons-itude' avec $|a_6|$, la 'chromaticité' avec $|a_1|$, etc. **Tout accord/gamme présente une certaine répartition des six caractères**, en vertu de l'égalité célèbre qui dit que la somme de leurs carrés est essentiellement constante.

Théorème 14 (Plancherel-Parseval).

$$\sum_{i=0}^{11} |a_i|^2 (= d^2 + 2 \sum_{i=0}^5 |a_i|^2 + |a_6|^2) = 12d.$$

Les diagrammes en camembert sont donc une excellente façon d'examiner cette répartition. Comparez le 'profil' et le camembert dans *Voiles* de Debussy, qui est en pure gamme par tons, puis pentatonique (entre les deux il y a un pivot sur trois notes avec une répartition intermédiaire). Même un sourd peut apprécier la différence entre Mozart et Debussy en regardant ces diagrammes!

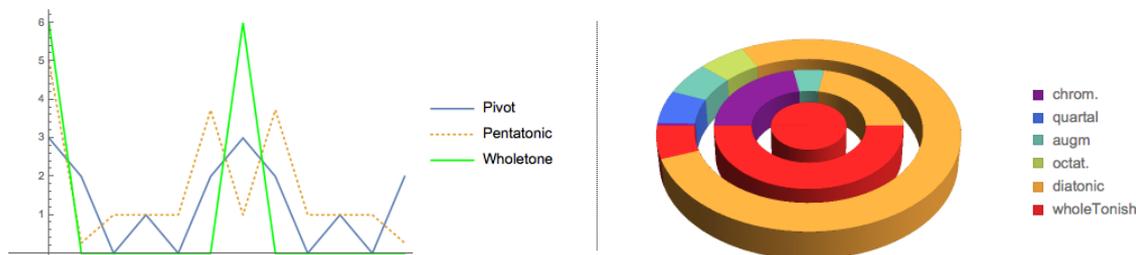


FIGURE 9 – Profil de Fourier de *Voiles*

En revanche, le début de la Sonate de Berg est clairement *quartal* (prééminence de $|a_2|$), un caractère typique de la musique atonale au début de xx^e siècle), cf. Fig. 10.

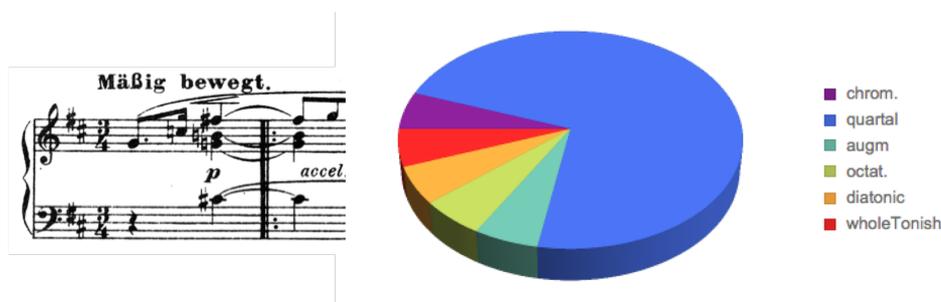


FIGURE 10 – Première mesure de la Sonate de Berg opus 1

Une analyse quantitative de ces caractères permet de répondre enfin objectivement à des questions subjectives telles que le degré d'octatonicité de la musique de Stravinsky. [6] calcule ces caractères sur des fenêtres glissantes de 2 ou 3 secondes, avec des résultats très variables selon les pièces considérées [par exemple *l'Oiseau de Feu* est particulièrement gamme-par-tonique, avec un a_6 prédominant].

4 Coefficients de Fourier nuls et pavages par translation

Nous avons trouvé la signification des coefficients de Fourier les plus grands : ils expriment la diatonicité et autres caractères fondamentaux, cf. section 3. Mais que signifie le cas inverse, celui de coefficients minimaux ou même nuls ?

4.1 Obtenir 0

Comme on a $\mathcal{F}_A(d) = \mathcal{F}_{dA}(1)$, autant commencer par annuler le premier coefficient $a_1 = \sum_k e^{-2ik\pi/n}$.

Mais quand est-ce qu'une somme d'exponentielles $e^{2ik\pi/n}$ peut valoir 0 ? Un cas trivial est celui où les affixes forment un polygone régulier (par exemple si k décrit le carré $\{1, 4, 7, 10\} \subset \mathbb{Z}_{12}$, la somme des exponentielles est nulle car le centre du carré est celui du cercle circonscrit).

Par linéarité, cela reste vrai d'une réunion disjointe de polygones réguliers, comme sur l'exemple de gauche de la figure 11.

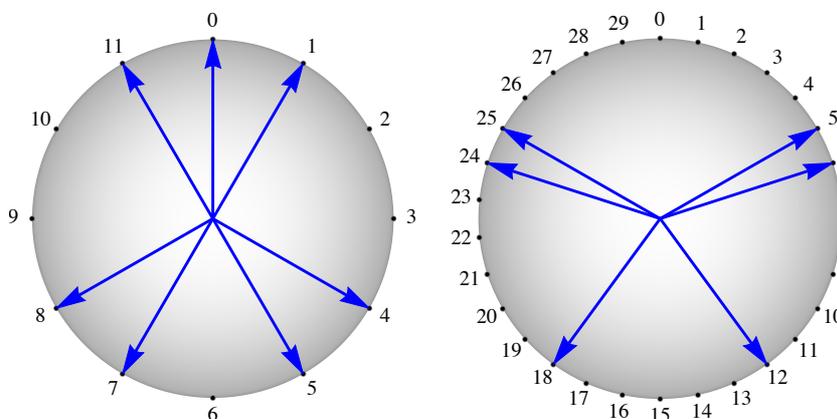


FIGURE 11 – Exemples d'ensembles parfaitement équilibrés

Le premier exemple est la 'gamme tzigane' Do Ré♭ Mi Fa Sol La♭ Si, si courante dans la musique balkanique.

A. Milne et alii [15] ont étudié cette propriété de nullité du premier coefficient de Fourier ('ensembles parfaitement équilibrés') dans une série d'articles remarquables, implémentant une belle application pour produire des 'rythmes équilibrés' (XronoMorph), cf. <http://www.dynamictonality.com/xronomorph.htm>. Andrew a conjecturé que tous ces ensembles devaient être des réunions disjointes de polygones réguliers. C'est le cas de la gamme tzigane = un triangle + deux diamètres. Mais un contre-exemple avait été donné... dans

le *Bulletin Vert* de l'UPS [11] (voyez le dessin de droite sur Fig. 11) ! Néanmoins, ainsi qu'il est prouvé dans leur dernier article [16],

Théorème 15. *Tout 'sous-ensemble parfaitement équilibré' (i. e. tel que $\mathcal{F}_A(1) = 0$) est somme et différence de polygones réguliers.*

Ajoutez ainsi un diamètre vertical à la figure de droite, vous verrez alors la réunion d'un pentagone et d'un triangle.

Ce théorème est non trivial et utilise des résultats puissants d'algèbre commutative (idéaux d'anneaux cyclotomiques).

Nous verrons plus bas que la nullité de $\mathcal{F}_A(1)$ entraîne celle d'autres coefficients, pour des raisons galoisiennes. Mais le cas le plus général du d^e coefficient est bien différent. Par exemple, J. Yust a constaté (cela se prouve directement par linéarité) que

Lemme 4 (du Triton).

Pour un triton (e. g. $\{0, 6\} \subset \mathbb{Z}_{12}$ ou ses transposés) ou une réunion de tritons, tous les coefficients de Fourier d'indice impair sont nuls.

J'ai prouvé une réciproque (dans \mathbb{Z}_{12}) plus difficile. Ce lemme est utile notamment pour **écarter** les tritons inclus dans un accord, permettant ainsi de calculer plus facilement les coefficients d'ordre impair. Par exemple, ils seront les mêmes pour la gamme diatonique (Do Ré Mi Fa Sol La Si) et la pentatonique (Do Ré Mi Sol La), car on a retiré le triton (Fa Si).

4.2 Ensemble des zéros de la DFT

Il est temps de considérer l'ensemble de tous les indices k tels que $\mathcal{F}_A(k) = 0$. Pour cela nous avons besoin des polynômes cyclotomiques.

Définition 5. *Le polynôme rationnel de plus petit degré annihilant $e^{2i\pi/n}$ a comme racines toutes les racines de l'unité d'ordre égal exactement à n . C'est le n^e polynôme cyclotomique $\Phi_n(X)$. Son degré est $\varphi(n)$, où φ est la fonction d'Euler.*

Ce polynôme est irréductible, à coefficients entiers et unitaire (par convention). Par exemple si $n = p$ est premier, toutes les racines de l'unité (sauf 1 elle-même) sont d'ordre p , d'où

$$\Phi_p(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1} = 1 + X + X^2 + \dots + X^{p-1}.$$

On les trouve tous en rangeant toutes les racines de $X^n - 1$ selon leur ordre, avec la formule 'Pokemon' suivante :

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

Définition 6. *On définit l'ensemble des zéros de la DFT de A par*

$$Z(A) = \{k \in \mathbb{Z}_n \mid \mathcal{F}_A(k) = a_k = 0\}.$$

Utilisons le polcar de A : rappelons que $k \in Z(A) \iff \mathbf{A}(e^{2ik\pi/n}) = 0$. Par irréductibilité des facteurs cyclotomiques, $\mathbf{A}(x)$ doit être divisible par Φ_q , où q est l'ordre de k dans \mathbb{Z}_n ; autrement dit, si on a k dans $Z(A)$ on a pour le même prix tous les éléments d'ordre égal à celui de k , qui sont tous les nombres dits *associés* à k : les $mk \pmod n$, avec m inversible modulo n . Autrement dit,

Théorème 16. $Z(A)$ est invariant par les automorphismes de $(\mathbb{Z}_n, +)$, i. e.

$$k \in Z(A) \iff \forall m \in \mathbb{Z}_n^* \quad mk \in Z(A).$$

Exemple : pour $n = 12$, quand $1 \in Z(A)$ on y trouvera aussi bien 5, 7 et 11.

4.3 Pavages par translation

La définition naturelle d'un pavage est géométrique, mais nous allons rapidement passer à son équivalent en termes de DFT. Observez comment $\{1, 2, 3\}$ pave l'intervalle d'entiers $\llbracket 1, 12 \rrbracket$ et *a fortiori* \mathbb{Z}_{12} alors que $\{1, 2, 6\}$ pave seulement \mathbb{Z}_{12} , cf. Fig. 12.

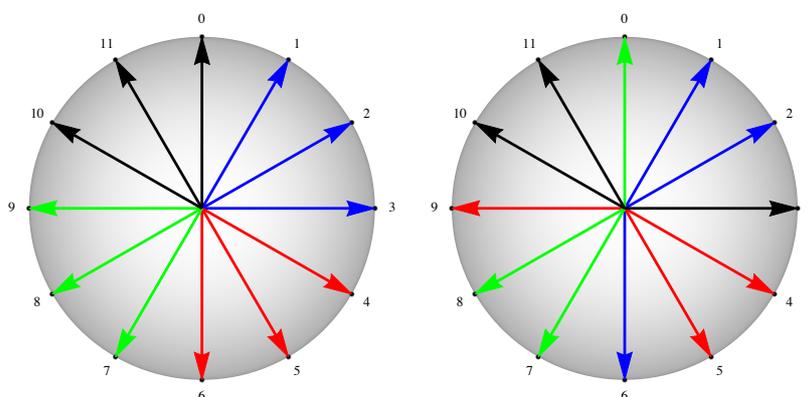


FIGURE 12 – Pavages de $\llbracket 1, 12 \rrbracket$ et \mathbb{Z}_{12}

Par ailleurs, il est clair que le motif $\{0, 1, 3, 4\}$ ne peut pas paver (avec des translatsés de lui-même), que ce soit modulo n ou pas. Il est vrai aussi, mais moins clair, que $\{0, 1, 2, 0, 1, 7\}$ ne pave aucun \mathbb{Z}_n non plus¹⁰ (mais cela marche si on utilise aussi le même motif inversé). Si le pavage se fait sur l'axe du temps, c'est-à-dire qu'entre les diverses voix on entend une note et une seule à chaque battue, on parle de **canon rythmique**. Des motifs qui pavent sont utilisés par des compositeurs contemporains, cf. Fig. 13. Cette section est une rapide initiation à ce sujet passionnant, voir [9] pour plus de détails.



FIGURE 13 – Un canon rythmique composé par George Bloch

10. Chiche de le prouver?

Définition 7. $A \subset \mathbb{Z}_n$ pave \mathbb{Z}_n [par translation] s'il existe $B \subset \mathbb{Z}_n$ tel que $A \oplus B = \mathbb{Z}_n$.

En termes de convolution, cela équivaut à $\mathbf{1}_A \star \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_n} = \mathbf{1}$ (l'application constante 1). En prenant la DFT on a la définition équivalente $\mathcal{F}_A \times \mathcal{F}_B = (n, 0, 0, \dots, 0)$ (c'est la DFT de l'application constante). On en déduit la définition moderne des pavages par translation.

Définition 8. A pave \mathbb{Z}_n s'il existe B tel que $Z(A) \cup Z(B) = \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ et $\#A \times \#B = n$.

Autrement dit, couvrir \mathbb{Z}_n par des sommes $a + b$, $(a, b) \in A \times B$ sans redites est équivalent à recouvrir $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ par les zéros des DFT de A et B .

Ainsi, $A = \{0, 1, 3, 6\}$ pave \mathbb{Z}_{16} avec $B = \{0, 4, 8, 12\}$: ceci se voit géométriquement, ou en calculant et multipliant les DFT, ou encore par

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(X) &= 1 + X + X^3 + X^6 = (1 + X)(1 + X^2)(1 - X^2 + X^3) = \Phi_2(X)\Phi_4(X)(1 - X^2 + X^3) \\ \mathbf{B}(X) &= 1 + X^4 + X^8 + X^{12} = (1 + X^4)(1 + X^8) = \Phi_8(X)\Phi_{16}(X) \end{aligned}$$

d'où l'on voit que $Z(A)$ recèle tous les éléments d'ordre 2 ou 4, et $Z(B)$ tous les éléments d'ordre 8 et 16 (ces derniers sont les générateurs du groupe \mathbb{Z}_{16} , *i. e.* les nombres impairs) et cela couvre tous les cas.

En fait (et c'était la définition couramment utilisée dans ces recherches dans les années 60), on a

$$\mathbf{A}(X) \times \mathbf{B}(X) = \left(\sum_{0 \leq k \leq 15, k \neq 2} X^k \right) + X^{18} = \sum_{0 \leq k \leq 15} X^k \pmod{X^{16} - 1}.$$

(La réduction modulo $X^{16} - 1$ transforme les X^k en X^{k-16} pour tout $k \geq 16$.)

Notons que le polynôme $\sum_{0 \leq k < n} X^k = \frac{X^n - 1}{X - 1}$ est le produit de tous les polynômes cyclotomiques $\Phi_d(X)$ pour $1 < d \mid n$, ce qui rend bien toutes les racines de l'unité d'ordre diviseur de n (sauf 1) [et passe au quotient modulo $X^n - 1$].

Néanmoins, si $A = \{0, 1, 3, 4\}$ et donc

$$\mathbf{A}(X) = (1 + X)(1 + X^3) = \Phi_2(X) \times \Phi_6(X),$$

il n'existe aucune 'contre-voix' B pavant avec A , et ce quel que soit n . Comment se fait-ce? Au jour d'aujourd'hui, on n'a pas mieux que les conditions de Coven et Meyerowitz qui remontent à 1998.

Définition 9. Soit $R(A)$ l'ensemble des ordres des éléments de $Z(A)$ dans le groupe \mathbb{Z}_n , et $S(A) \subset R(A)$ le sous-ensemble des puissances de nombres premiers. On définit deux conditions, l'une sur le cardinal, l'autre une stabilité (très) partielle.

$$(T_1) \#A = \prod_{p^r \in S_A} p.$$

(T₂) Pour toutes puissances de premiers **distincts** $p^r, q^s \dots \in S_A$, leur produit est dans R_A : $p^r q^s \dots \in R_A$.

L'article séminal de Coven et Meyerowitz [13] prouvait alors les résultats suivants.

Théorème 17.

1. A pave $\Rightarrow (T_1)$.
2. $(T_1) + (T_2) \Rightarrow A$ pave.

3. Si $n = \text{pgcd } R(A) = p^r q^s$ a au plus deux facteurs premiers, alors
 $A \text{ pave } \mathbb{Z}_n \iff (T_1) + (T_2).$

On n'a pas fini de se demander si la condition (T_2) est inconditionnellement nécessaire ! J'ai prouvé l'équivalence dans deux petits cas supplémentaires : $n = p^2 qr, pqr s$, en utilisant le fait qu'on peut réduire un canon rythmique dans un groupe plus petit si \mathbb{Z}_n est un groupe de Hajós [9].

4.4 Algorithmique des canons

La conjonction des conditions de Coven-Meyerowitz réduit drastiquement les possibilités pour R_A . Mettons que l'on décide que $S_A = \{8, 9\}$ et $n = 72$. Alors R_A contient 72, mais aussi ne contient pas 2, 3, 4, 6, 12 qui doivent être dans R_B . De plus, connaissant R_A , il est possible d'après [13] de trouver un B qui convienne à tous les motifs A' tels que $R_A = R_{A'}$, et en cherchant tous les motifs compatibles avec B , on récupère tous les motifs qui pavent et ont un R_A donné. Cette méthode, inventée par Matolcsi [1], a permis des recherches exhaustives de tous les canons et en particulier des canons apériodiques (ou canons de Vuza) pour $n \leq 180$, c'est-à-dire qui vérifient

$$\forall 0 < p < n \quad A + p \neq A \text{ et } B + p \neq B$$

qui sont les 'atomes' dont on peut fabriquer les canons les plus complexes (tout canon pouvant se décomposer récursivement jusqu'à tomber sur un tel canon, ce qui a des conséquences pratiques et théoriques importantes, par exemple les cas supplémentaires de la 'conjecture (T_2) ' et de la conjecture de Fuglede que j'ai démontrés, cf. [9]). À noter que les périodicités internes se voient immédiatement sur les coefficients de Fourier – après tout, la mission première de la DFT n'était-elle pas de décomposer un signal en somme de signaux de période plus petite ?

Soulignons à ce propos les méthodes de Szabó et Kolountzakis pour fabriquer des canons de Vuza par perturbation de canons très réguliers, préalablement 'dépliés' en dimension 3 par la décomposition de Sylow de $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{P \times Q \times R} \approx \mathbb{Z}_P \times \mathbb{Z}_Q \times \mathbb{Z}_R$ (avec P, Q, R premiers entre eux deux à deux) qui a notamment servi à démolir certaines conjectures, montrant ainsi que les canons rythmiques sont toujours un peu plus compliqués qu'on ne l'espérait, e. g. [14]. Et pour finir, soulignons que tous les conjectures sur ce sujet qui ont été résolues (et il y en a eu un certain nombre) l'ont été négativement... Des références générales assez récentes sont [1] et [17].

5 Homométrie

Deux objets ayant la même figure de diffraction, *i. e.* la même structure interne, sont dits **homométriques**. Deux objets isométriques sont homométriques, mais la réciproque est fautive, comme le montrent les parties $\{0, 1, 4, 6\}$ et $\{0, 1, 3, 7\}$ de \mathbb{Z}_{12} .¹¹ Tom Johnson a composé la pièce *Intervals (2013)* avec les 48 tétracordes homométriques à ceux-ci, en les reliant par leurs intersections (qui sont forcément des tritons, le seul intervalle apparaissant deux fois dans ces ensembles). Leurs quatre formes sont visibles sur la Fig. 14. Il a composé de nombreuses autres pièces sur ce thème.

11. Vous pouvez vérifier par vous-mêmes que les distributions intervalliques sont identiques, elles valent $(4, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$.

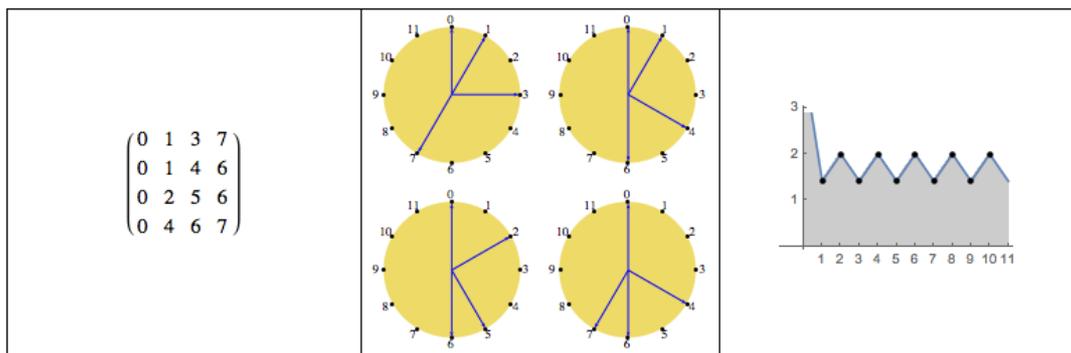


FIGURE 14 – Quadruplets homométriques

La détermination des classes d’homométrie (tous les objets homométriques à un objet donné) est un problème largement ouvert, nos deux articles [2, 3] dans *Journal of Mathematics and Music* donnaient l’état de l’art sur la question (qui n’a pas beaucoup évolué depuis). Un des rares résultats généraux est le théorème de Babbitt mentionné plus haut – un objet est homométrique à son complémentaire – qui peut être prolongé à des espaces infinis mais mesurables, comme des groupes topologiques compacts. Voir en plus concis le chapitre qui y est consacré dans [8].

5.1 Unités spectrales

Le problème de déterminer une classe d’homométrie est trivial dans l’espace continu de toutes les distributions, il redevient difficile quand on se restreint à des fonctions caractéristiques *i. e.* des distributions avec des valeurs de 0 ou 1 seulement. En effet, on a vu que deux distributions $s, t \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ sont homométriques si et seulement si on a $|\widehat{s}| = |\widehat{t}|$. Considérons alors¹² une distribution u telle que $\widehat{u}(k) = \widehat{s}(k)/\widehat{t}(k)$ *i. e.* telle que tous ses coefficients de Fourier soient de module 1, on a

$$\widehat{u} \times \widehat{t} = \widehat{s} \iff s = u \star t.$$

Résumons-nous.

Définition 10.

Une **unité spectrale** est une distribution $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ telle que $\forall k \in \mathbb{Z}^n \ |\widehat{u}(k)| = 1$.

Leur ensemble forme le groupe des unités spectrales (avec \star), qui est un groupe commutatif topologique isomorphe au tore de dimension n .

En effet, par transformée de Fourier, on se ramène à n coordonnées de module 1, qui décrivent le produit de n cercles unité.

Proposition 2. Deux distributions s, t sont homométriques si et seulement si¹³ il existe une unité spectrale telle que $s = u \star t$.

12. u est parfaitement déterminée si \widehat{u} l’est, par DFT inverse.

13. Il y a quelques technicités quand certains coefficients de Fourier sont nuls mais cela marche quand même.

Les classes d'homométrie sont donc les orbites de l'action du groupe des unités spectrales. Mais trouver dans ces orbites (continues, homéomorphes à des tores) les éventuels éléments à coordonnées 0 ou 1 reste un problème combinatoire formidable. En fait, J. Mandereau a démontré qu'il n'existe pas de groupe en un sens "raisonnable" (agissant sur les notes) tel que les classes de parties homométriques soient les orbites de l'action de ce groupe! En revanche, pour une classe donnée, il existe bien sûr un groupe de permutations de ses accords qui agit simplement transitivement sur cette classe (dans le cas des 48 accords homométriques à $\{0, 1, 4, 6\}$, c'est le groupe affine modulo 12).

Il est généralement préférable de passer par une recherche informatique – il n'y a que 4 095 accords pris parmi 12 notes! – à moins que l'on ne travaille dans un groupe trop gros. Néanmoins, cette approche par un groupe continu a des retombées intéressantes. Par exemple, si l'on va de $\{0, 1, 4, 6\}$ à $\{0, 1, 3, 7\}$ et qu'on itère la même transformation, on trouve douze distributions différentes, dont huit sont des fonctions caractéristiques de vrais accords :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

On peut interpréter les quatre premières distributions comme une division de la transposition d'une tierce mineure (passant de $\{0, 1, 4, 6\}$ à $\{1, 3, 9, 10\} = \{0, 1, 4, 6\} - 3$) en trois étapes identiques, qui ne sont *pas* des transpositions (la première change $(0, 1, 4, 6)$ en $(0, 1, 3, 7)$, et la distribution suivante n'est pas un vrai ensemble), c'est-à-dire une **racine cubique** non triviale de la transposition d'une tierce mineure.

5.2 Quelques unités spectrales particulières

Changer A en $A + 1$ (transposition d'un demi-ton, dans le cas d'accords) s'exprime par une unité spectrale très simple, $j = (0, 1, 0, \dots, 0)$. Les transpositions de k demi-tons sont donc obtenues en convolant par $j^k = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$.

En revanche, les opérations d'inversion ne se traduisent pas de manière aussi simple. Ainsi, l'unique unité spectrale qui change l'accord de Do majeur en celui de Do mineur (ce qui se fait dans \mathbb{Z}_{12} par la simple symétrie $x \mapsto 7 - x$) est

$$u = \frac{1}{15}(7, 4, -2, 1, 7, 4, -2, 1, -8, 4, -2, 1).$$

Cette unité spectrale n'est **pas** involutive : on n'a pas $u \star u = (1, 0, 0, \dots)$, l'élément neutre du produit de convolution. Pire encore, **u n'est pas d'ordre fini!**

À noter que u se calcule facilement par le formalisme matriciel évoqué dans la section 2 ; en effet, si les distributions des deux accords précédents sont s et t , et u est l'unité spectrale qui les connecte, alors on doit avoir avec les matrices associées

$$\mathcal{F} = \mathcal{S} \times \mathcal{U} \iff \mathcal{U} = \mathcal{S}^{-1} \mathcal{F}$$

et la distribution u est donnée par la première colonne de sa matrice circulante \mathcal{U} .

Pour nous consoler, observons que le passage au complémentaire qui donne le théorème de Babbitt est assuré par une seule et même unité spectrale, $h = (\frac{2}{n} - 1, \frac{2}{n}, \frac{2}{n}, \dots)$ avec $\mathcal{H} =$

$$\frac{2}{n} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} - I_n$$

qui est la matrice d'une réflexion telle que, quand n est pair et A est un ensemble à $n/2$ éléments, $h * \mathbf{1}_A$ donne la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_n \setminus A}$ du complémentaire de A .

Enfin, et de façon générale, le groupe des unités spectrales est l'intersection de l'algèbre des matrices circulantes et du groupe unitaire $U_n(\mathbb{C})$. Il est décrit par les équations suivantes, où les a_j sont les valeurs de la distribution :

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j a_{j+k} = 0, k = 1 \dots \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \text{ et } \sum_j a_j^2 = 1$$

qui donnent un exercice bien connu quand $n = 3$ (matrices circulantes orthogonales).

Comme une unité spectrale connectant deux fonctions caractéristiques est rationnelle, je me suis intéressé au sous-groupe des unités spectrales rationnelles, en rajoutant la condition d'être d'ordre fini. Ce groupe est fini mais grand, il est isomorphe à $\prod_{d|n} \mathbb{Z}_{\text{pgcd}(2,d)}$, mais la preuve de ce fait n'est sans doute pas merveilleuse, et surtout elle ne tiendrait pas dans cet article (cf. [8], Thm. 2.10, p. 33-39 et les 11 Lemmes 2.12 à 2.22 !). Elle contient de jolis détours inattendus et galoisiens sur les corps cyclotomiques, pour ceux qui aiment ce genre de choses.

À noter enfin qu'il existe des homométries d'ordre supérieur, où l'on considère non seulement les intervalles (rapports entre paires d'éléments) mais les tri-intervalles (dispositions de triplets) ou plus. Ces conditions, plus fortes, de k -homométries contraignent les parties homométriques à être isométriques (et même translatées l'une de l'autre) au moins quand leurs DFT sont non singulières, mais il reste nombre de questions ouvertes à ce sujet, cf. la bibliographie.

6 Phases

Nous avons pu éclaircir le sens (et l'utilité pratique) de la *taille* des coefficients de Fourier ; il est grand temps de considérer la dimension oubliée, la *phase*, c'est-à-dire la direction de ces coefficients dans le plan complexe.

Définition 11. $\varphi_k(A) = \arg(a_k)$, au sens où le k^e coefficient peut s'écrire

$$a_k = |a_k| e^{i\varphi_k}.$$

($|a_k|$ est le k^e caractère, i. e. la diatonicité pour $k = 5$, etc.)

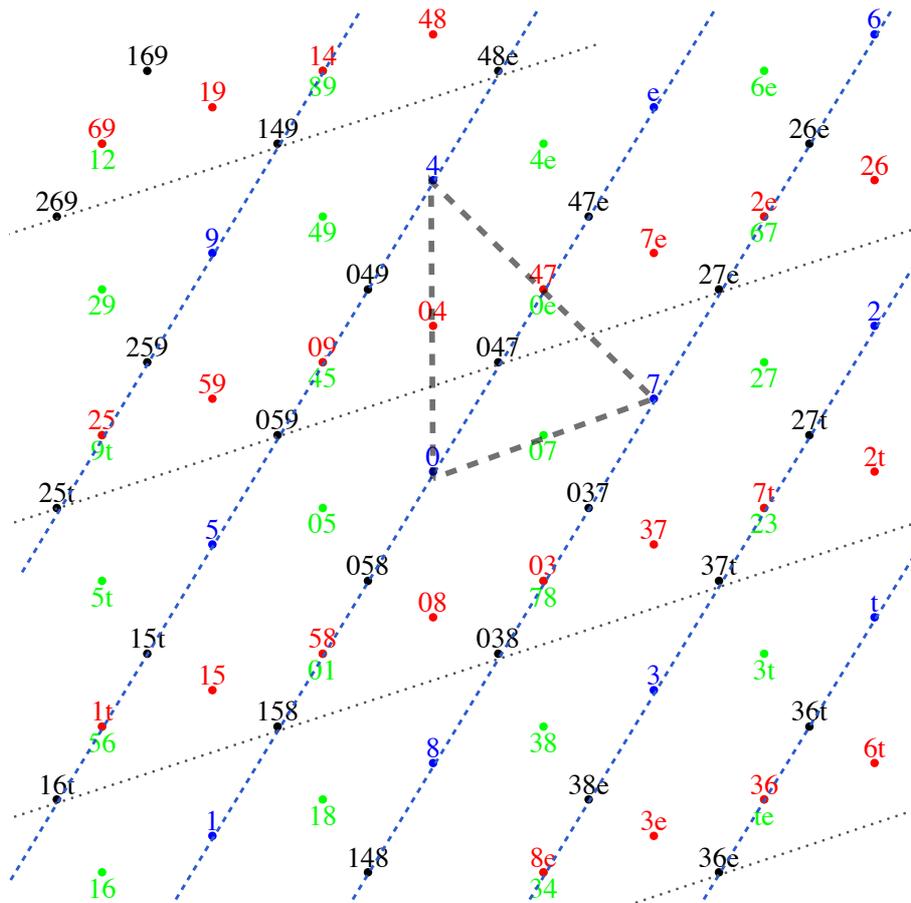


FIGURE 15 – Tore des phases avec notes isolées, triades et quelques dyades

Cette phase est définie modulo 2π . Néanmoins, il est agréable et plus parlant de la renormaliser modulo 12, suivant [23], en posant $\Phi_k = -\frac{6}{\pi}\varphi_k$. Ainsi la phase du premier coefficient de $\{3\}$ est tout simplement... 3, celle du 7^e est $7 \times 3 = 9$, etc.

Sur la Fig. 15, on a représenté deux de ces phases, Φ_3 et Φ_5 , pour un certain nombre d'accords de une à trois notes. L'espace ambiant est défini plus bas. N'oublions pas que ces coordonnées sont des angles, et que le graphique doit donc se recoller de gauche à droite comme de haut en bas.

En particulier, la ligne pointillée bleue est une 'droite' (topologiquement, un cercle fermé) d'équation $5\Phi_3 = 3\Phi_5$. Voyez-vous où elle repasse, après avoir traversé les points $e(= 11)$, 0 et 1 ?

On peut aussi se demander quel est "le" milieu de 0 et 2, question qui prendra tout son sens à la fin de cet article.

6.1 Que signifie la phase ?

On comprend mieux la signification de la phase quand on suit ses changements après des transformations simples, transposition et inversion.

Théorème 18.

$$\Phi_k(A + \tau) = \Phi_k(A) + k\tau \quad \Phi_k(-A) = -\Phi_k(A).$$

Cela établit clairement que la phase est liée à l’harmonie : par exemple, elle permet de distinguer les différentes tonalités, e. g.

Lemme 5. La 5^e phase Φ_5 d’une gamme majeure est égale à la phase Φ_5 de sa tierce fondamentale, e. g.

$$\Phi_5(\text{Do Maj}) = \Phi_5(\text{Do}, \text{Mi}).$$

En revanche, pour une gamme mineure [harmonique], la phase est identique à celle de son accord parfait : $\Phi_5(\text{Do min}) = \Phi_5(\text{Do}, \text{Mi b}, \text{Sol})$. Cela fait sens musicalement, car ces sous-accords ont des **fonctions tonales** qui coïncident bien avec ces identifications ; jouer l’accord parfait de Do mineur suggère immédiatement cette même tonalité, tout comme jouer une tierce majeure propose à l’esprit le contexte de la tonalité majeure associée.

Ceci fait d’autant plus sens que, quand la musique est décidément tonale (grande valeur de a_5), il suffit de suivre les variations de phase Φ_5 pour repérer immédiatement les modulations.¹⁴ Suivons par exemple a_5 pendant les premières lignes de la *Sonata Facile* de Mozart en Do Majeur, où l’on s’écarte bien peu de cette tonalité ! (on tend néanmoins vers la dominante Sol majeur à la fin du passage).

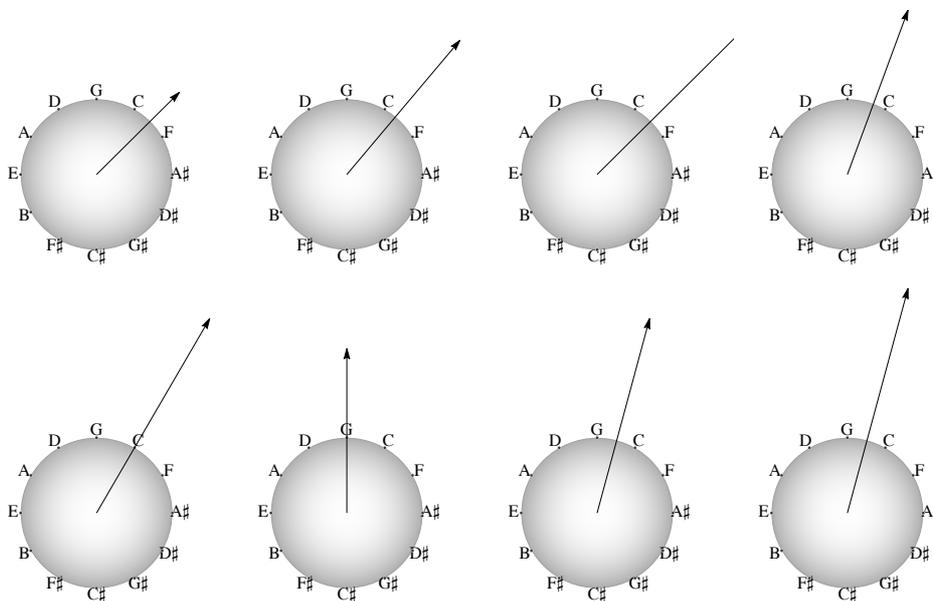


FIGURE 16 – a_5 dans un passage de Mozart

Prenons un exemple plus intéressant (scientifiquement parlant !), proposé par J. Yust [22]. Les trois voix extraites de ce quatuor de Stravinsky sont très diatoniques, quand on les

14. Une *modulation* est un changement de tonalité, c’est-à-dire un changement de la gamme ambiante vers une autre gamme – généralement transposée de la précédente, par exemple de Do majeur à Ré majeur.

considère séparément. En revanche, étant données leurs directions très écartées, la somme de leurs coefficients a_5 respectifs (c'est-à-dire la diatonicité de l'ensemble) est quasiment nulle, cf. Fig. 17.

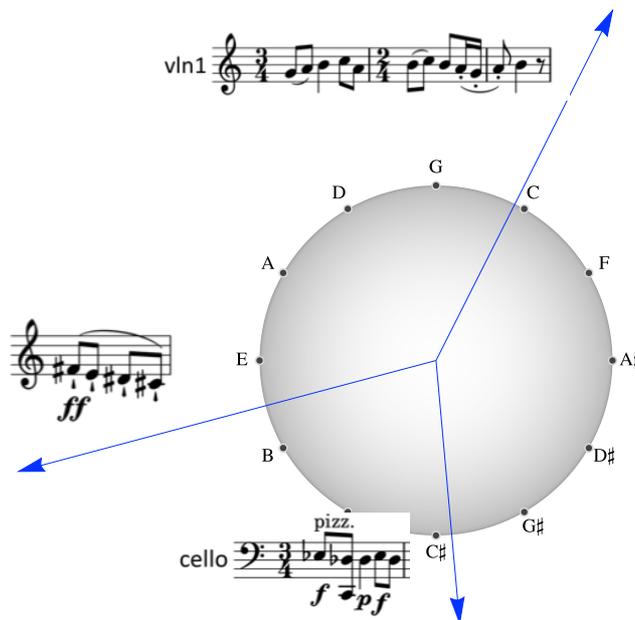


FIGURE 17 – Les a_5 des trois voix dans Stravinsky se neutralisent

Par exemple, le tétracorde (Sol, La, Si, Do) est entre Do majeur (la gamme) et Sol majeur – deux gammes diatoniques dont il est un sous-ensemble – alors que Do \sharp Ré \sharp Mi Fa \sharp est situé pile entre les gammes de Mi et Si majeur. On dispose ainsi d'une analyse très fine de la diatonicité créée ou détruite par l'adjonction de telles ou telles notes.

On peut mettre ce genre d'analyse en film ou en tout cas en animation, sachant que les coefficients de Fourier prépondérants portent l'information essentielle sur le passage que l'on écoute, au sens de l'Analyse en Composantes Principales : on se focalise sur les caractères les plus 'saillants' (a_5 pour la musique "classique", avec a_3 ou a_2 juste derrière).

6.2 Le tore $\mathcal{T}_{3,5}$

Φ_5 permet de différencier les douze accords parfaits majeurs, mais pas les majeurs et les mineurs : Do majeur ou Ré mineur donnent le même coefficient.¹⁵ C'est pour cette mauvaise raison que j'ai cru bon de rajouter un deuxième angle (Φ_3), de telle sorte que

$$\text{accord parfait} \mapsto (\Phi_3, \Phi_5)$$

s'avérât injective. En fait, on s'est aperçu depuis qu'il y avait de bien meilleures raisons de considérer

15. 'It's not a bug, it's a feature' : notez bien que l'accord de ré mineur est inclus dans la gamme de Do majeur, et que c'est le seul satisfaisant la condition de ne pas rencontrer l'accord initial.

Définition 12. *L'ensemble des valeurs (Φ_3, Φ_5) est le tore des phases $\mathcal{T}_{3,5}$.*

C'est un tore (topologiquement comme algébriquement) puisque ces deux coordonnées sont définies mod. 12, mais le dessin 'usuel' d'un tore bidimensionnel en 3D Fig. 18 ne permet plus d'apprécier la métrique naturelle de cet espace.

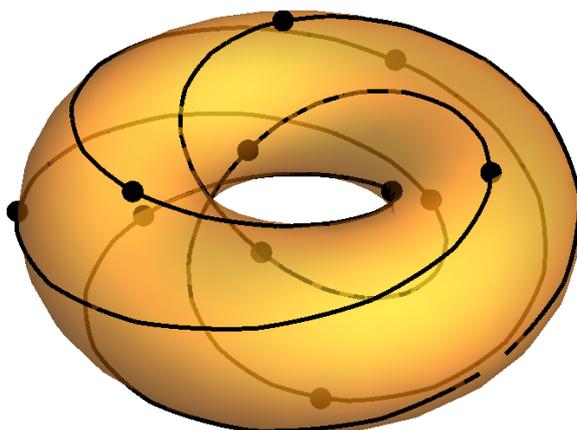


FIGURE 18 – Le tore des phases en 3D (la ligne connecte les accords parfaits majeurs)

Théorème 19. *Avec la métrique canonique du tore $\mathcal{T}_{3,5}$ ¹⁶, les accords parfaits les plus proches de Do majeur (pour fixer les idées) sont trois accords mineurs, ceux de La, Mi et Si. Or ces trois accords sont les voisins de Do majeur dans la théorie néo-riemannienne, sur le graphe des 24 accords parfaits ou sur le graphe dual des 12 notes isolées que l'on appelle **Tonnetz** (cf. Fig. 19) et qui remonte à Euler.¹⁷*

Comme on le voit sur la figure 19, sur l'axe horizontal on passe d'une note à la voisine par transposition d'une quinte tandis que les axes obliques correspondent à une transposition d'une tierce. Les triangles sont les accords parfaits majeurs ou mineurs, selon leur orientation, et l'on passe d'un tel accord à l'un de ses trois voisins en conservant deux sommets et par symétrie autour de leur côté commun. Il est remarquable que le tore des phases incorpore, en conservant leur topologie, le Tonnetz, son dual [les centres des triangles reliés à leurs voisins, comme 047], et la plupart des accords possibles et imaginables, alors que la plupart des modèles géométriques d'espaces musicaux précédents se confinent à un cardinal fixé pour les accords qu'ils contiennent.

Qui plus est, comme on va le voir bientôt, cette immersion du Tonnetz et de son dual (et bien plus encore) préservent la simplicité des transformations géométriques usuelles (transposition et inversion).

16. C'est la métrique quotient de la distance euclidienne sur le plan par l'identification des bords du carré. On la voit sans doute mieux sur la Fig. 15

17. Contrairement à ce que l'on croit ordinairement, le premier graphe de l'histoire des mathématiques n'est pas celui des ponts de Königsberg mais ce *Tonnetz*, qui relie les notes par tierces et par quintes. Autre confusion possible, le Riemann qui a repopularisé le Tonnetz d'Euler à la fin du xx^e siècle n'est pas notre Bernhard (celui de l'Hypothèse), mais Hugo, un musicologue un peu moins célèbre.

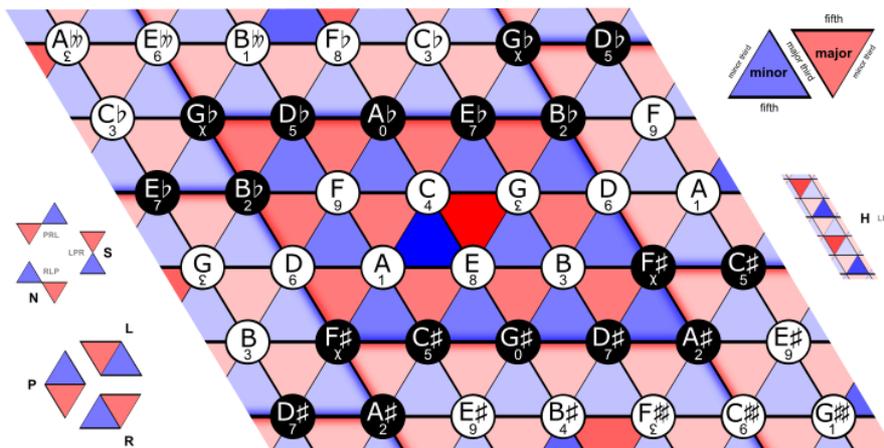


FIGURE 19 – Le Tonnetz (Wiki) ; les triangles sont les accords parfaits

6.3 Symétries

Comme on l’a vu au Thm. 18, les translations (‘transpositions’ pour les musiciens) se traduisent sur le tore par... des translations.

Corollaire 1. *L’image d’un translaté $A + \tau$ de l’accord A sur le tore des phases $\mathcal{T}_{3,5}$ est le translaté de l’image de A par le vecteur $(3\tau, 5\tau)$.*

On a donc une injection du groupe T des translations de \mathbb{Z}_{12} (ou plutôt du groupe induit des translations des parties de \mathbb{Z}_{12}) dans le groupe des translations du tore, c’est-à-dire les translations du plan quotientées modulo 12 dans leurs deux dimensions. Il est parfois intéressant de le prolonger au groupe continu (prendre un τ réel et plus uniquement entier). Quand τ décrit $[0, 12) \subset \mathbb{R}$, l’orbite d’un accord A est une ligne continue homéomorphe à un cercle. Quand A est un accord parfait majeur, la ligne passe par tous les autres accords parfaits majeurs et *semble* passer aussi par les mineurs ; mais ce n’est pas exact (cf. la ligne bleue sur la Fig. 15). Néanmoins, cela fait sens pour la topologie ‘physiologique’¹⁸ car on trouve l’accord de Fa mineur ‘presque à mi-chemin’ entre ceux de Do majeur et Do♯ majeur, voyez 058 ‘entre’ 047 et 158 sur la Fig. 15.

Il est bien plus surprenant que les inversions se traduisent aussi par des transformations simples et isométriques du tore $\mathcal{T}_{3,5}$. Toujours à partir du Thm. 18 on déduit que, pour les notes isolées, la symétrie $x \mapsto 2c - x$ dans \mathbb{Z}_{12} se traduit par une symétrie centrale dans le tore,

$$\begin{pmatrix} 3x \\ 5x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6c \\ 10c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3x \\ 5x \end{pmatrix}.$$

On ne s’attendrait pas à ce que cela se prolonge aux phases des accords, qui sont des logarithmes complexes de sommes d’exponentielles, *i. e.* des applications fort peu linéaires ! Néanmoins, et c’est assez stupéfiant, on a le

Théorème 20 (Yust, 2014). *Si A, B sont deux accords symétriques dans \mathbb{Z}_{12} autour d’un centre c ou d’une dyade commune ab , alors leurs images sur le tore sont symétriques autour de l’image de c (resp. de ab).*

18. J’entends par là que deux accords sont proches quand on a peu de mouvements à faire sur le clavier, ou le manche de la guitare, etc., pour passer de l’un à l’autre. Le terme agréé est ‘voice-leading’.

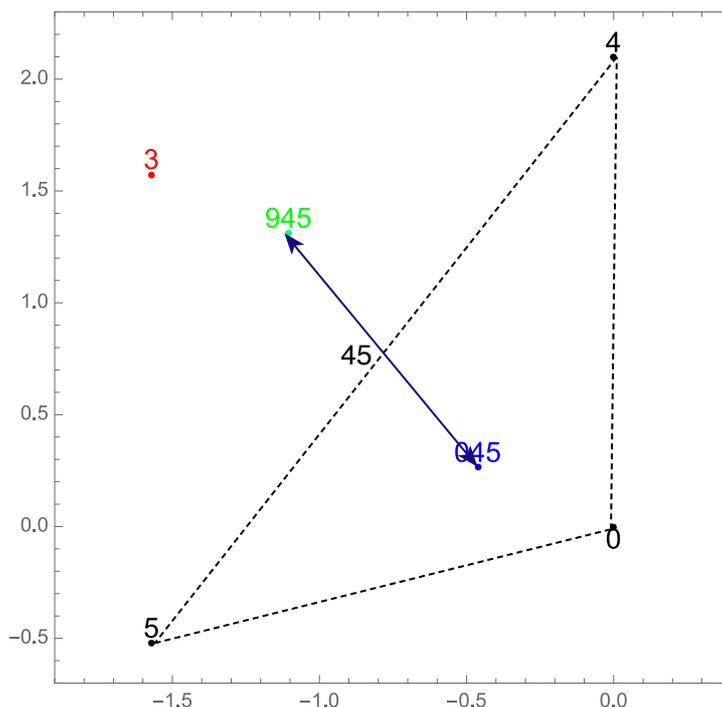


FIGURE 20 – Symétries centrales sur le tore des phases

On voit clairement sur la figure 20 que 4 et 5 sont symétriques autour du couple (45), mais aussi qu’il en est de même des triades 045 et 945, ainsi que des singletons 0 et 3 [qui sont aussi symétriques par rapport à la tierce 03, qui n’est pas sur la figure].

Cela semble autoriser à utiliser des arguments de symétrie, mais il faut faire attention : la propriété que l’image sur le tore des phases du milieu est le milieu des images sur le tore des phases est vraie – pour des singletons¹⁹, en vertu de la formule

$$\arg(e^{i\theta} + e^{i\phi}) = \frac{1}{2}(\arg(e^{i\theta}) + \arg(e^{i\phi})) \pmod{\pi},$$

mais il faut prendre garde à ses limites : la notion même de “milieu des images sur le tore des phases” est mal définie, car deux points sur $\mathcal{T}_{3,5}$ ont 4 milieux, vu que $\frac{\Phi_k(A) + \Phi_k(B)}{2}$ est défini modulo 6 et non plus 12. La notion même de segment $[A, B]$ est trompeuse, car sur le tore il existe une infinité de lignes droites (géodésiques, images de lignes droites dans le plan) reliant deux points donnés, et il n’y a même pas toujours un unique “plus court chemin”...

Par exemple, Do et Mi (0 et 4) sont symétriques autour de Ré (2), que ce soit dans \mathbb{Z}_{12} , sur un clavier de piano ou des frettes de guitare, mais dans le tore des phases le centre de symétrie évident (cf. Fig. 15) est *la tierce (Do, Mi)=(04)*. Les symétries autour d’une dyade sont des opérations essentielles dans le contexte du Tonnetz, où l’on passe ainsi d’un accord parfait à l’un de ses trois voisins.

19. Et dans quelques autres cas

6.4 Pour finir, un mystère

Comme je l'ai mentionné plus haut, un contexte tonal (*i. e.* diatonique) est caractérisé par de grandes valeurs de a_5 mais aussi de a_3 et a_2 (dans une gamme majeure il y a pas mal de tierces mineures et de secondes). Si l'on focalise sur ces trois composants prépondérants, on aimerait être sûr qu'ils sont indépendants. Or le tore des phases bidimensionnel (avec les seules Φ_5 and Φ_3) semble, à l'usage, être suffisant pour décrire ce genre de musique.²⁰ J. Yust a fait une découverte étrange en étudiant les variations des phases sur un grand nombre de pièces musicales.

Si l'on suit Φ_2, Φ_3 et Φ_5 simultanément, il s'avère de manière très générale que,

dans la musique tonale, l'index tonal' $\delta = \Phi_5 - \Phi_3 - \Phi_2$ est très souvent 0 ou proche de 0.

J'ai personnellement vérifié que cela est significatif statistiquement : pour des accords aléatoires, cela n'arrive que dans 10 % des cas environ,²¹ et pas 80-90 % comme dans les cas analysés par Yust. Une explication très partielle est que la musique tonale est largement constituée à partir de 'briques' simples comme les accords parfaits, les gammes majeures, les intervalles de quintes, qui vérifient toutes cette propriété d'un index tonal proche de 0 ; et j'ai pu prouver, dans l'esprit des propriétés de symétries centrales ci-dessus, que si deux accords de masse égale [ou voisine, par continuité] ont un faible index tonal, alors il en est de même de leur réunion. Ceci dit, cette propriété magique reste largement mystérieuse, mais elle justifie la réduction à deux dimensions de l'étude de la musique tonale (ce qui est le cas aussi bien de $\mathcal{T}_{3,5}$ que du plus classique Tonnetz).

Conclusion

J'espère que ce voyage un peu trop rapide vous aura intéressé(e)s. On y voit clairement que les théories mathématiques de la musique sont tout aussi dignes d'intérêt que tout autre domaine de pointe de la recherche contemporaine, et parfois plus dynamiques encore. Elles suscitent en tout cas de nombreux sujets de TIPE et c'est tant mieux. Tous les sujets abordés dans ce résumé, forcément sommaire mais que j'espère compréhensible, sont largement développés dans [8].

Bibliographie

- [1] Andreatta, M., Agon, C., (éditeurs invités), Special Issue "Tiling Problems in Music," *Journal of Mathematics and Music*, July, 3 2, 2009.
- [2] Agon, C., Amiot, E., Andreatta, M., Ghisi, D., Mandereau, J., *Z-relation and Homometry in Musical Distributions*, *Journal of Mathematics and Music* 5 2, 2011, p. 83-98.
- [3] Mandereau, J., Ghisi, D., Amiot, E., Andreatta, M., Agon, C., *Discrete phase retrieval in musical structures*, *Journal of Mathematics and Music*, 5 2, 2011, pages 99-116.
- [4] Amiot, E., *Can a scale have 14 generators?*, *Proceedings of MCM*, London, Springer 2015, p. 349-360.
- [5] Amiot, E., *David Lewin and Maximally Even Sets*, *Journal of Mathematics and Music*, 1 3, 2007, p. 157-172.

20. Il est naturel, et d'ailleurs efficace, de considérer d'autres coefficients pour d'autres styles, comme a_2 pour la musique atonale du début XX^e ou a_4 pour des passages octatoniques, etc.

21. J'ai défini "δ proche de 0" par $|\delta| \leq 1$, sachant que δ varie entre -6 et 6.

- [6] Amiot, E., *Interval Content vs. DFT*, Proceedings of MCM, Mexico 2017, Springer 2018, p. 151-166.
- [7] Amiot, E., Sethares, W., *An Algebra for Periodic Rhythms and Scales*, Journal of Mathematics and Music 5 **3**, 2011.
- [8] Amiot, E., *Music through Fourier Space*, CSM series, Springer (October 2016).
- [9] Amiot, E., *Structures, Algorithms, and Algebraic Tools for Rhythmic Canons*, Perspectives of New Music 49 (**2**), 2011, p. 93-143.
- [10] Beauguitte, P., *Transformée de Fourier discrète et structures musicales*, Master's thesis, IRCAM 2011 for ATIAM Master. Available online : <http://articles.ircam.fr/textes/Beauguitte11a/index.pdf>.
- [11] Amiot, E. : *Sommes nulles de racines de l'unité*, Bulletin de l'Union des Professeurs de Spéciales 230, 2010, p. 30-34.
- [12] Clough, J., Douthett, J., *Maximally even sets*, Journal of Music Theory, **35**, 1991, p. 93-173.
- [13] Coven, E., Meyerowitz, A. *Tiling the integers with one finite set*, in : *J. Alg.* 212, 1999, p. 161-174.
- [14] Kolountzakis, M. *Translational Tilings of the Integers with Long Periods*, Elec. J. of Combinatorics (10)**1**, R22, 2003.
- [15] Milne, A., Bulger, D., Herff, S., Sethares, W., *Perfect Balance : A Novel Principle for the Construction of Musical Scales and Meters*, in Proceedings of MCM 5th international conference, London (Springer) 2015, p. 97-108.
- [16] Milne, A., Bulger, D., Herff, S., Sethares, W., *Exploring the space of perfectly balanced rhythms and scales*, Journal of Mathematics and Music 12, Special Issue on Balanced pc-sets, Taylor and Francis 2018.
- [17] Rahn, J., Amiot, E., eds, Perspectives of New Music, special issue 49 **2** on *Tiling Rhythmic Canons*, 2011.
- [18] I. Quinn, *General Equal-Tempered Harmony*, Perspectives of New Music 44 **2** / 45 **1**, 2006-2007.
- [19] Tymoczko, D., *Colloquy : Stravinsky and the Octatonic : Octatonicism Reconsidered Again*, Music Theory Spectrum 25 **1**, 2003, p. 185-202.
- [20] Yust, J., *Schubert's harmonic language and Fourier phase space*, JMT **59**, p. 121-181 (2015).
- [21] Yust, J., *Restoring the Structural Status of Keys through DFT Phase Space*, Proceedings of ICMM, Puerto Vallarta 2014, Springer, 2017, p. 329-338.
- [22] Yust, J., *Applications of DFT to the theory of twentieth-century harmony*, Proceedings of MCM, London, 2015, Springer, p. 207-218.
- [23] Yust, J., *Analysis of Twentieth-Century Music Using the Fourier Transform*, Music Theory Society of New York State, Binghamton, April 2015.