

Canons rythmiques

Emmanuel Amiot

I - Une notion musicale qui vaut son pesant d'algèbre

Résumé

Cet article fait le point sur une notion riche, issue de préoccupations musicales mais qui s'est avérée féconde en problèmes mathématiques fascinants.

En particulier l'étude des canons rythmiques a permis de découvrir des résultats inédits sur les corps finis et de démontrer de nouveaux cas de la conjecture spectrale. En retour, bien sûr, les outils mathématiques performants utilisés ont donné de nouvelles dimensions à explorer aux compositeurs. La théorie de GALOIS a donc fait une apparition inattendue dans certains logiciels d'aide à la Composition Assistée par Ordinateur!

Des illustrations musicales (ou en tout cas, sonores. . .) de cet article peuvent être trouvées sur le site <http://canonsrythmiques.free.fr/Midi>, sous forme de fichiers MIDI.

1 Canons musicaux et canons rythmiques

1.1 Canon musical

Le principe du canon musical est probablement bien connu du lecteur ; l'exemple le plus connu des francophones est sans doute « *Frère Jacques* », qui se chante de préférence à quatre, chaque chanteur reprenant exactement la même comptine mais décalé d'une mesure par rapport au chanteur précédent.

Frère Jacques, frère jacques	Dormez-vous? dormez-vous? Frère Jacques, frère jacques	Sonnez les matines, sonnez les matines Dormez-vous? dormez-vous? Frère Jacques, frère jacques	Ding deng dong, ding deng dong Sonnez les matines, sonnez les matines Dormez-vous? dormez-vous? Frère Jacques, frère jacques
------------------------------	---	---	---

qui devient, en régime de croisière,

Frère Jacques, frère jacques	Dormez-vous? dormez-vous?	Sonnez les matines, sonnez les matines	Ding deng dong, ding deng dong
Ding deng dong, ding deng dong	Frère Jacques, frère jacques	Dormez-vous? dormez-vous?	Sonnez les matines, sonnez les matines
Sonnez les matines, sonnez les matines	Ding deng dong, ding deng dong	Frère Jacques, frère jacques	Dormez-vous? dormez-vous?
Dormez-vous? dormez-vous?	Sonnez les matines, sonnez les matines	Ding deng dong, ding deng dong	Frère Jacques, frère jacques

Ce principe de jouer une même mélodie (ou une forme légèrement déformée de la même mélodie) le long de diverses voix est aussi celui de la fugue, dont le plus célèbre spécialiste est J.S. BACH.

C'est tout un art (de la fugue!) que de faire coïncider harmonieusement des notes diverses avec un décalage. J.S. BACH, justement, a par exemple montré sa virtuosité dans les *Variations Goldberg* où il fait des canons décalés dans le temps et dans l'espace des hauteurs, successivement d'un unisson, d'une seconde, d'une tierce, etc. . .

Pour modéliser de façon constructive les canons, nous allons nous montrer moins ambitieux, en nous concentrant exclusivement sur le domaine rythmique, et plus exigeants, en posant une condition rigoureuse :

Sur chaque temps, on doit entendre une seule note

Sans cette contrainte, on pourrait (on peut!) faire un canon fondé sur n'importe quel motif. Cela n'a pas grand intérêt, sauf peut-être combinatoire, et nous verrons que ce dernier domaine recèle des perspectives tout à fait subtiles (par exemple sur la génération des différents canons possibles).

Le canon rythmique « canonique », si j'ose dire, est donc fondé sur un pattern rythmique discret, qu'on peut imaginer joué par un instrument de percussion (on néglige la question de la durée des notes), pattern qui est répété à l'identique par d'autres voix.

On peut alors modéliser ce pattern très simplifié par une série d'entiers, qui repèrent les moments où une note est jouée. Sans perte de généralité, on peut fixer l'origine des temps à la première note du pattern, qui va donc commencer par le nombre 0. Le principe même du canon signifie que les diverses entrées du motif sont obtenues par des translations, égales aux décalages avec la première entrée : les diverses voix seront $A, A + b_1, A + b_2 \dots$

En mettant dans un même vecteur tous ces décalages, on obtient une première formalisation :

DÉFINITION 1. Soit $A = \{0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$ un sous-ensemble de \mathbb{N} ;

A sera le motif (**inner rhythm**) d'un canon rythmique s'il existe un pattern des voix (**outer rhythm**) $B = \{0, b_1, \dots, b_{\ell-1}\}$ tel que $A \times B \ni (a, b) \mapsto a + b$ est injective. A est le motif du canon, B la séquence des entrées (les moments où chaque instrument commence sa partie). Cette condition s'écrit aussi $A + B = A \oplus B$.

Exemple : Le motif $A = \{0, 1, 3, 6\}$ donne un canon à quatre voix avec $B = \{0, 4, 8, 12\}$. En effet, $A \oplus B = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$. Une représentation simplifiée de partition en est donnée figure 1.

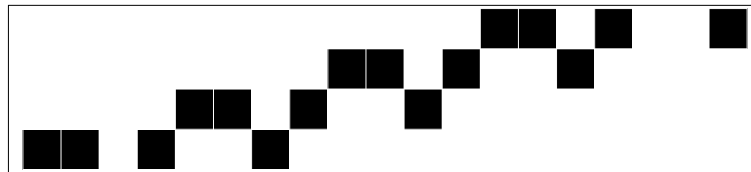


FIG. 1 – Un canon rythmique

REMARQUE 1. Chaque note est jouée sur un multiple entier de l'unité de temps ; ceci peut paraître une contrainte artificielle et forte, mais en fait aussi bien DAN TUDOR VUZA [?], qui est le pionnier des recherches sur les canons rythmiques, que LAGARIAS [?] dans un article purement mathématique, ont montré essentiellement que ce cas est le seul possible pour un motif **fini**.

Un corollaire élémentaire de la définition :

PROPOSITION (DUALITÉ). Si $A \oplus B$ est un canon rythmique, il en est de même de $B \oplus A$: on peut échanger les rôles des inner et outer rhythms.

La commutativité de l'addition permet donc de fabriquer un canon à p voix de q notes en partant d'un canon à q voix de p notes. Sur l'exemple précédent cela donne la figure 2.

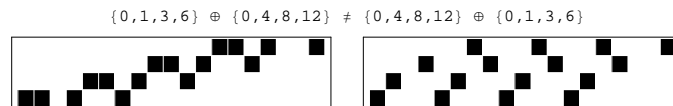


FIG. 2 – Deux canons duaux

Une autre modélisation consiste à utiliser plutôt les fonctions caractéristiques de A et de ses translatés. Ainsi $A = \{0, 1, 3, 4\}$ devient plutôt 110011(00...). Des formes réduites de ces écritures, appelées *mots de Lyndon*, sont essentielles pour les calculs de dénombrements ; nous y reviendrons.

1.2 Canons périodiques

On remarque, sur l'exemple ci-dessus, qu'il y a des trous dans le canon – des silences, pour les musiciens – mais que ces trous se trouveraient naturellement bouchés par d'autres copies du motif. En fait on peut obtenir un canon infini avec une note et une seule par temps, soit avec un nombre infini de voix, soit de façon plus réaliste en prolongeant le motif par périodicité (ici la période 8) comme on le présente sur la figure 3.

On obtient ainsi un *pavage périodique* de \mathbb{Z} par le motif A . Dorénavant, je parlerai donc indifféremment de pavages (pavages de \mathbb{Z}) ou de canons rythmiques. Par passage au quotient, cela revient à dire que l'on a un pavage du groupe cyclique $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. D'où une nouvelle définition, plus restrictive :

Variations sur un canon

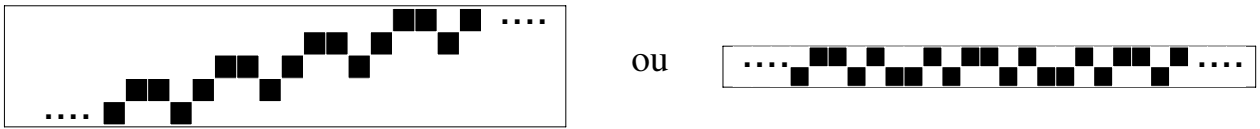


FIG. 3 – Canon prolongé à l'infini

DÉFINITION 2. On a un canon rythmique de motif $A = \{a_0, \dots, a_{k-1}\}$ et de période n s'il existe $B \subset \mathbb{N}$ tel que

$$A \oplus B = \mathbb{Z}_n$$

La condition de somme directe exprime que pour tous les temps, sur une période de n , on a exactement une note et une seule.

Exemple: Le motif $A = \{0, 1, 3, 6\}$ donne un canon de période 8 avec $B = \{0, 4\}$. En effet, $A \oplus B = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 10\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ si on travaille modulo 8. C'est l'effet obtenu si on reprend périodiquement ce canon (comme *Frère Jacques*).

REMARQUE 2. On voit bien sur le graphique qu'il y a une relation d'équivalence sous-jacente : paver avec le motif $\{0, 1, 3, 6\}$ donne fondamentalement le même pavage de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ que $\{0, 2, 5, 7\}$ ou que tout autre translaté du motif initial (mais pas le même pavage de \mathbb{N} , cf. infra). Plus généralement, \mathbb{Z}_n agit sur lui-même par translations, ce qui induit une action sur l'ensemble de ses parties. Or cette action commute avec la notion de pavage : un translaté (dans \mathbb{Z}_n) d'un motif A qui pave avec période n va encore paver, et avec le même B . Cela vient de ce que \mathbb{Z}_n est topologiquement un cercle, et la notion de pavage ou de canon rythmique se moque de l'origine de ce cercle comme on le voit sur les figures 4 et 5. C'est pourquoi en pratique on convient sans perte de généralité que A, B commencent par 0.

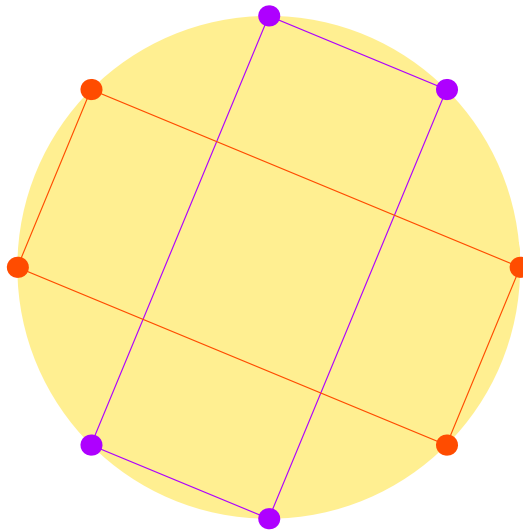


FIG. 4 – La forme d'un motif est définie à une rotation près

En fait on va être amené à confondre A et son orbite sous le groupe des translations, i.e. $\{A + k \bmod n \mid k \in \mathbb{Z}_n\}$. Pour repérer une telle orbite, il est assez classique de considérer la suite des différences de A , en choisissant le membre de l'orbite qui aura le plus grand écart final, ce qui donne la représentation la plus compacte – essentiellement comme la **basic form** dans la Set Theory de l'américain ALAN FORTE et son école (voir [?], pp. , pour une discussion plus précise de ces questions de représentation). Par exemple $\{0, 1, 4, 5\}$ et $\{3, 6, 7, 2\} \equiv \{0, 3, 4, 7\}$ sont deux représentants de la même basicForm $(2, 1, 2, 3)$, cf. figure 4.

Innocemment se présente ici une question qui aura des répercussions profondes : un motif A a-t-il n représentants distincts sous l'action par translation de \mathbb{Z}_n , ou moins ? En d'autres

termes, un motif qui pave un canon rythmique est-il ou pas un motif à transpositions limitées, pour reprendre l'expression qu'avait créée Olivier Messiaen (mais dans le domaine des hauteurs)? On voit bien que ce n'est pas le cas sur la figure précédente.

Nous reparlerons de cela dans le paragraphe sur les dénombrements et aussi dans celui sur les diverses transformations des canons rythmiques.

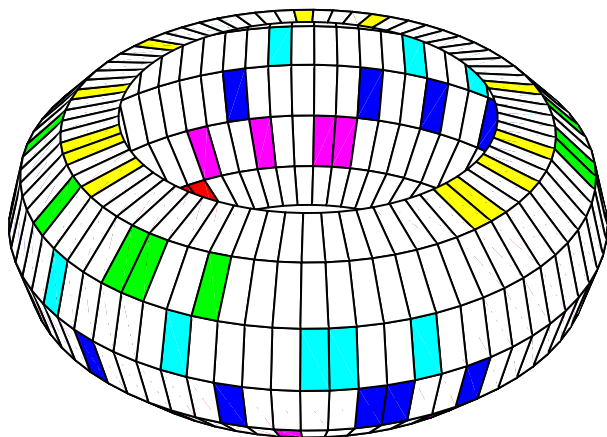


FIG. 5 – Un canon de Vuza, de période 108

Cette condition de périodicité que nous avons apparemment imposée semble très forte. Mais on connaît depuis 1950 le théorème suivant :

THÉORÈME 1. ([de Bruijn])

Si A est une partie **finie** de \mathbb{N} telle qu'il existe $C \subset \mathbb{Z}$ avec $A \oplus C = \mathbb{Z}$, alors il existe un entier n et une partie (finie) B tels que $C = B \oplus n\mathbb{Z}$. Donc

$$A \oplus B = \mathbb{Z}_n$$

La démonstration de ce théorème repose sur l'incontournable principe des tiroirs, en voici l'idée générale : on montre essentiellement deux choses, en supposant que l'on a réalisé une partie du pavage de la forme $A \oplus (C \cap]-\infty, a])$:

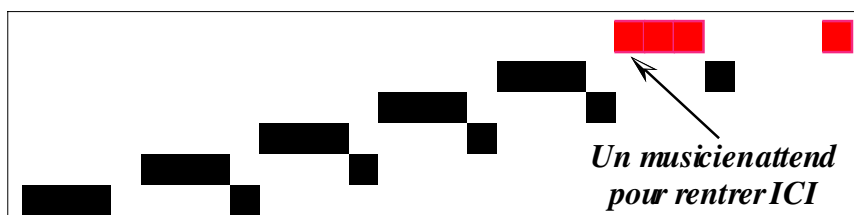


FIG. 6 – Pourquoi tout canon de motif fini est périodique

1. qu' il existe une seule façon de caser le motif suivant sur la « fenêtre » $[a, a + \ell(A)]$ où $\ell(A) = \text{Max}(A) - \text{Min}(A)$ est la largeur du motif (cf. figure 5),
2. qu' après avoir pavé un certain temps avec A on retombe forcément sur une configuration déjà vue. En effet sur une fenêtre comme ci-dessus il n'y a que $2^{\ell(A)}$ états possibles.

... donc on retombe sur une façon de paver déjà utilisée, donc le phénomène est périodique. Mentionnons à ce propos un premier problème ouvert : la démonstration de ce théorème donne une borne supérieure $n \leq 2^{\ell(A)}$ pour la période du pavage, mais tous les exemples connus vérifient $n \leq 2 \times \ell(A)$ Est-ce général? On ne sait le prouver que dans divers cas particuliers. Réciproquement il est facile de donner un motif pour lequel la plus petite période possible est effectivement celle-là, je laisse cette devinette au lecteur (solution en fin d'article).

En revanche un motif infini peut très bien donner un canon aperiodique (par exemple les nombres dont l'écriture binaire n'a que des bits d'ordre impairs). En fait un théorème de SWENSON de 1976 prouve algorithmiquement que pour toutes parties finies A, B en somme directe, il existe un prolongement en $A \subset \tilde{A}, B \subset \tilde{B}$ tels que $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \mathbb{Z}$. Tout ceci est détaillé dans [?].

1.3 Paver \mathbb{N} ou paver \mathbb{Z}

REMARQUE 3. Il y a une distinction entre le canon de motif $\{0, 1, 3, 6\}$ et celui que l'on obtiendrait avec $\{0, 1, 4, 5\}$: dans le second cas on obtient carrément

$$A \oplus B = \{0, 1, 4, 5\} \oplus \{0, 2\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \subset \mathbb{N}$$

sans qu'il soit besoin de réduire modulo la période n . Dans le premier cas comme on l'a vu il subsiste des « trous », qui se trouvent comblés par les énonciations précédentes ou suivantes du motif, le canon étant supposé prolongé indéfiniment vers le passé et l'avenir. Il s'agit donc respectivement de pavages de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et de \mathbb{Z}_n , l'un étant un cas particulier de l'autre.

DÉFINITION 3. J'appellerai **pavage compact** le cas d'un pavage de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$. À noter qu'on a alors immédiatement un pavage de \mathbb{N} (on rajoute $n\mathbb{N}$).

De tels pavages sont bien connus, là aussi depuis les années 50. Ils ont une structure particulièrement répétitive que j'évoquerai dans un article ultérieur.

2 Historique

À la suite des travaux de pionniers comme HAJÒS, REDEĬ, DEBRUIJN dans les années 1950, a émergé une classification des factorisations des groupes cycliques en sommes directes de sous-ensembles, problème équivalent à celui des canons rythmiques périodiques. Ce problème, difficile, s'est posé après la résolution par HAJÒS d'une conjecture de MIN-KOWSKI sur des pavages de l'espace par des cubes. On a cru un moment que pour toute factorisation $\mathbb{Z}_n = A \oplus B$, l'un au moins des facteurs A, B possédait une période $< n$: ainsi de la factorisation $\{0, 1, 4, 5\} \oplus \{0, 2\} = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ où le premier facteur a pour période 4 : $\{0, 1, 4, 5\} + 4 = \{0, 1, 4, 5\} \pmod{8}$.

Les groupes où cela est vrai s'appellent « groupes de HAJÒS », ou « bons groupes ». Le plus petit contre-exemple est $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$, nous y reviendrons en détail.

La classification des bons groupes parmi les groupes abéliens finis a été achevée par SANDS dans les années 1970, après une vingtaine d'années d'efforts.

Dans l'ignorance totale de ces résultats, le mathématicien (et musicien) DAN TUDOR VUZA s'est lancé vers 1980 dans l'étude des canons rythmiques. Son plus beau résultat concerne ce qu'il appela 'Regular Canons of Maximal Category' et qui correspondent aux mauvais groupes cycliques : il a en effet retrouvé tout seul la collection des résultats de HAJÒS et consorts sur la classification des \mathbb{Z}_n en bons ou mauvais groupes.

Il a aussi établi plusieurs résultats techniques que nous rencontrerons au fur et à mesure, et qui ont généralement été redécouverts bien plus tard.

Ses travaux ont été publiés en 1990 en 4 longs articles dans [?]. Ils ont été rapprochés du problème de HAJÒS par MORENO ANDREATTA, pianiste, mathématicien et analyste, qui a rédigé une partie de son mémoire de troisième cycle à l'Ircam sur ce thème. J'ai prolongé sa démarche vers une mathématisation encore plus poussée des canons rythmiques, avec des retombées très pratiques puisque certains des outils détaillés ci-après sont actuellement implémentés dans le logiciel *Open Music* produit par l'Ircam (qui intégrait déjà, par exemple, certains canons de VUZA). Pour tout cela consulter [?].

Par ailleurs, la question purement mathématique des pavages en dimension 1, équivalente à celle des canons rythmiques, reste ouverte malgré les efforts soutenus et contemporains de chercheurs (généralement américains) comme LAGARIAS, WANG, LABA, TAO et bien d'autres.

Nous verrons plus bas une belle condition qui est conjecturée nécessaire et suffisante pour qu'un motif donné pave, et qui établit un lien avec la *conjecture spectrale*, dont des préoccupations d'ordre musical m'ont permis récemment de démontrer quelques cas inédits.

Enfin la vivacité des recherches sur les canons rythmiques vient avant tout de l'intense imagination des musiciens, qu'ils soient compositeurs ou analystes. Nous sommes vraiment à un carrefour de préoccupations diverses et d'intense bouillonnement intellectuel, avec une fascinante synergie entre musiciens et chercheurs « purement » matheux.

Ainsi l'américain (à Paris) TOM JOHNSON, compositeur minimaliste (son opéra sur 4 notes est très souvent joué), invente plusieurs sortes de pavages musicaux par an, qui soulèvent des problèmes parfois inextricables du point de vue mathématique ou combinatoire ; le musicien JON WILD a découvert en étudiant des théories musicales du Moyen-Âge un remarquable théorème sur les pavages par motifs de trois éléments (tout motif de trois notes pave avec son rétrogradé), de nombreux autres compositeurs (GEORGE BLOCH, FABIEN LÉVY et d'autres) se servent dans leurs œuvres des outils et des résultats abstraits sur les canons rythmiques.

3 Modélisation polynomiale et facteurs cyclotomiques

Pour travailler dans une structure plus riche, on fait comme SOPHUS LIE passant d'un groupe de Lie à son algèbre : par exponentiation.

3.1 Polynôme associé à un motif rythmique

Certes \mathbb{Z}_n n'est pas un groupe continu, mais cela marche bien dans la catégorie des \mathbb{Z} -modules, on obtient ainsi une condition équivalente à celle de la décomposition en somme directe. Précisons : l'exponentiation d'une partie finie de \mathbb{N} signifie

DÉFINITION 4. Soit $A \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble fini non vide. Alors on pose

$$A(X) = \sum_{k \in A} X^k$$

PROPOSITION. La somme $A + B$ est directe (i.e. $A \times B \ni (a, b) \mapsto a + b$ est injective) ssi

$$A(X) \times B(X) = (A \oplus B)(X)$$

Et donc la définition des canons rythmiques est la condition (T_0) :

PROPOSITION. A est le motif d'un canon rythmique avec « motif des entrées » B et période n ssi

$$(T_0) \quad A(X) \times B(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} \pmod{X^n - 1}$$

Par exemple $\{0, 1, 3, 6\} \oplus \{0, 8, 12, 20\}$ donne les polynômes $(1 + X + X^3 + X^6) \times (1 + X^8 + X^{12} + X^{20})$ dont le produit est

$$1 + X + X^3 + X^6 + X^8 + X^9 + X^{11} + X^{12} + X^{13} + X^{14} + X^{15} + X^{18} + X^{20} + X^{21} + X^{23} + X^{26}$$

qui se réduit modulo $X^{16} - 1$ à $1 + X + \dots + X^{15}$ – concrètement on applique la règle $X^k \rightarrow X^{k \bmod n}$.

NB : c'est en découvrant cette formalisation appliquée par ANDRANIK TANGIAN à un problème de TOM JOHNSON que j'ai personnellement embrassé la cause des canons rythmiques ; mais ce procédé remonte à REDEĚI dans les années 1950.

3.2 Les 'perfect square tilings' de Tom Johnson

Le but de paragraphe est de montrer sur un exemple assez simple que l'introduction des polynômes n'est pas qu'une simple commodité d'écriture : si on sort l'artillerie lourde, c'est qu'elle s'impose pour l'étude des canons !

Tom s'est posé récemment la question de réaliser un canon avec un motif très simple $T_1 = (0 \ 1 \ 2)$ mais avec les contraintes suivantes :

- Utilisez des **augmentations** de ce motif, T_2, \dots, T_k (au sens musical : comprenez des multiples, translatsés, comme $(5 \ 9 \ 13) = 5 + T_4 = 5 + (0 \ 4 \ 8)$),
- les multiplicandes sont tous distincts,
- et on pave de façon 'compacte'.

Ce problème a été exposé dans la rubrique de J.P. DELAHAYE dans *Pour la science* (novembre 2004) ce qui a donné l'occasion à plusieurs lecteurs, bons programmeurs, de trouver des solutions avec le motif initial (0 1 2 3) – à cette heure la question de l'existence d'un pavage parfait pour 5 est ouverte.

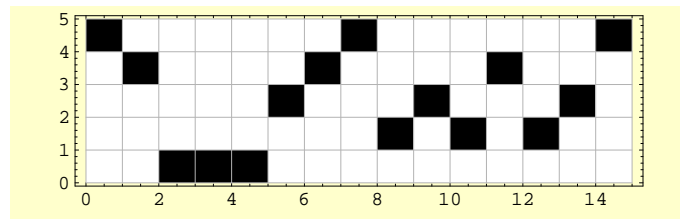


FIG. 7 – Plus petit ‘perfect square tiling’.

Quant Tom s’est ouvert de cette nouvelle question, il nous a présenté la plus petite solution (figure 6, où l’on voit que T_1 est décalé de deux unités), et une question troublante : pourquoi était-il impossible de trouver de ‘pavage en carré parfait’ avec un ou deux parmi les motifs augmentés T_3, T_6, T_9 ? Son programme lui donnait les trois à la fois (figure 7), ou aucun.

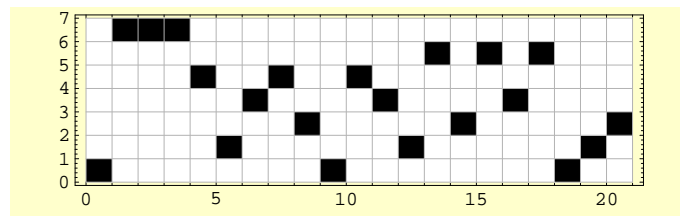


FIG. 8 – Plus petit ‘perfect square tiling’ avec T_3, T_6, T_9 .

Cette petite question admet une solution très simple, au point que je laisse le lecteur la trouver (solution dans le prochain numéro).

Petite indication : le motif de base devient $1+X+X^2$, ses augmentations sont les $1+X^k+X^{2k} = \Phi_3(X^k)$ où j’ai posé $\Phi_3(X) = 1+X+X^2$, et la question de Tom revient à trouver une expression algébrique de la forme

$$\sum_{i \in I} X^{k_i} \Phi_3(X^{i_i}) = 1 + X + \dots = \sum_{j=0}^{3n-1} X^j = \frac{X^{3n} - 1}{X - 1}$$

Maintenant nous pouvons commencer à raisonner sur le nombre de multiples de 3 dans l’ensemble I !

3.3 Polynômes cyclotomiques

L’intérêt de ce changement d’espace, de \mathbb{Z} à une partie de $\mathbb{Z}[X]$, est que l’on sait plusieurs choses sur les polynômes qui apparaissent dans notre problème (voyez votre meilleure bible d’algèbre commutative pour une preuve du théorème suivant) :

THÉORÈME 2. Les facteurs irréductibles (dans $\mathbb{Q}[X]$ ou $\mathbb{Z}[X]$) de $1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$ sont les célèbres polynômes cyclotomiques Φ_d , avec $d \mid n$ (et $d > 1$ ici). Φ_d est le produit (dans $\mathbb{C}[X]$) des $X - \xi$ où ξ décrit l’ensemble des racines de l’unité d’ordre exactement d .

On peut les calculer par récurrence par la formule $\prod_{d \mid n} \Phi_d(X) = X^n - 1$ ou, par inversion de

$$\text{MÖBIUS } \Phi_n(X) = \prod_{d \mid n} (X^d - 1)^{\mu(d)}.$$

Leurs coefficients sont entiers (relatifs). On a par exemple $\Phi_p(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^{p-1}$ quand (ssi) p est premier.

En fait on a là un exemple fameux autant que spectaculaire de conjecture fautive : les cent premiers polynômes cyclotomiques ont leurs coefficients parmi $0, 1, -1$. Par exemple $\Phi_{72} = X^{24} - X^{12} + 1$. Mais...

EXERCICE 1. Vérifier que Φ_{105} est le plus petit polynôme cyclotomique ayant des coefficients autres que $-1, 0, 1$.

On a tout de suite un critère très utile qui résulte du théorème précédent :

COROLLAIRE 1. Pour un canon de période n , chaque polynôme cyclotomique $\Phi_d, 1 < d \mid n$, divise $A(X)$ ou $B(X)$.

Ceci résulte du théorème du GAUSS dans l'anneau principal $\mathbb{Q}[X]$, appliqué à la relation (T_0) . Ce phénomène explique la remarque d'Andreatta, faite sur les canons Vuza, que beaucoup de canons sont « presque » (i.e. à peu de termes près, voire exactement) des palindromes. En effet, tous les polynômes cyclotomiques sont autoréciproques, i.e. palindromiques, ainsi que leurs produits. Comme ce sont (presque) les seuls facteurs de A, B cela explique que ces derniers sont (presque) palindromiques.

Au passage, soulignons que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas un anneau aussi riche que $\mathbb{Q}[X]$ et qu'il faut faire attention à ne pas aller trop vite dans certains raisonnements. Le fait que les polynômes utilisés ou recherchés soient unitaires s'avère souvent précieux.

Nous verrons que la répartition de ces facteurs cyclotomiques entre A et B est capitale pour avoir un canon rythmique.

Le cas de Φ_p d'indice premier admet une généralisation utile quoique élémentaire (formule de définition par récurrence + récurrence forte) :

LEMME 1. On a $\Phi_d(1) \neq 1$ ssi d est une puissance d'un nombre premier.

Si $d = p^\alpha$ on a alors $\Phi_d(1) = p$, car

$$\Phi_{p^\alpha}(X) = 1 + X^{p^{\alpha-1}} + X^{2p^{\alpha-1}} + \dots + X^{(p-1)p^{\alpha-1}}$$

Par exemple, $\Phi_9 = 1 + X^3 + X^6$.

4 Les conditions de Coven-Meyerowitz

Avant 1998, on ne connaissait quasiment aucune condition générale pour déterminer si le motif A était capable d'engendrer un canon rythmique, i.e. de paver. (à l'exception du cas où $|A|$ était une puissance d'un nombre premier). Sauriez-vous dire par exemple si $(1, 4, 9, 16)$ forme un canon rythmique ? (réponse dans le prochain article)

Des considérations précédentes, les deux mathématiciens AARON MEYEROWITZ ET ETAN COHEN ont déduit (cf. [?]) les critères suivants :

THÉORÈME DE COVEN-MEYEROWITZ. Soit R_A l'ensemble des $d \in \mathbb{N}$ où Φ_d divise $A(x)$, et S_A le sous-ensemble des puissances de nombres premiers éléments de R_A . On définit alors les conditions

$$(T_1) : A(1) = \prod_{p^\alpha \in S_A} p \text{ et}$$

$$(T_2) : \text{si } p^\alpha, q^\beta, \dots \in S_A \text{ alors } p^\alpha \cdot q^\beta \cdot \dots \in R_A.$$

Alors

(Thm A1) Si A pave, alors (T_1) est vérifiée.

(Thm A2) Si (T_1) et (T_2) sont vérifiées, alors A pave.

(Thm B) Si $|A| = A(1)$ n'a que deux facteurs premiers et si A pave, alors (T_2) est vérifiée.

Donnons un exemple : le motif $A = \{0, 1, 8, 9, 17, 28\}$ a un polynôme associé qui se factorise en

$$(1 + X) (1 - X + X^2) (1 + X + X^2) (1 - X^2 + X^4) (1 - X^3 + X^6) (1 + X^3 - X^4 - X^7 + X^8 - X^9 + X^{11} - X^{12} + X^{13})$$

On reconnaît¹ les facteurs cyclotomiques d'indices 2, 3, 6, 12, 18, plus un outsider qui n'est pas cyclotomique du tout. On a donc $R_A = \{2, 3, 6, 12, 18\}$, $S_A = \{2, 3\}$; or $2 \times 3 = 6$, ce qui prouve à la fois (T_1) (car $A(1) = 6$) et (T_2) (car $6 \in R_A$). Effectivement, A pave :

Seul le troisième de ces résultats (thm B) est véritablement difficile ; il repose sur un lemme de SANDS qui prouve que A ou B est inclus dans $p\mathbb{Z}$ (où p est l'un des deux facteurs premiers),

¹J'ai implémenté pour cela une procédure qui marie harmonieusement théorie de GALOIS et mathématiques numériques, utilisant notamment que si toutes les racines d'un polynôme unitaire **irréductible** à coefficients entiers sont de module 1, alors ce sont des racines de l'unité. La précision du calcul a dû être adaptée au degré du polynôme passé en variable !

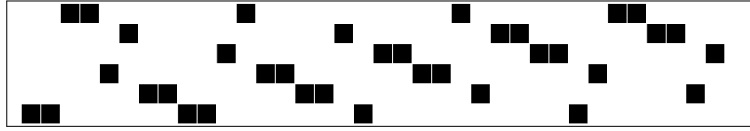


FIG. 9 – Canon vérifiant (T_1) & (T_2)

ce qui est faux dans le cas général, et ce en utilisant un outil on ne peut plus Galoisien :

LEMME 2. Si n est premier avec m et si \mathbb{Q}_m désigne le corps cyclotomique (i.e. $\mathbb{Q}[e^{2i\pi/m}]$) alors Φ_n est encore irréductible dans \mathbb{Q}_m .

Qu'on me pardonne de mentionner ce résultat technique : dans l'article suivant qui travaille dans $\mathbb{F}_q[X]$, les Φ_n cessent généralement d'être irréductibles et le contraste avec la situation en caractéristique 0 méritait, je pense, d'être mentionnée. De plus l'essence de ce lemme est contenue dans un résultat essentiel que je prouverai au début du troisième et dernier article de cette série (sur l'action du groupe affine sur les canons rythmiques).

Je vais reproduire ici la démonstration du (Thm A1), qui illustre bien l'intérêt d'avoir élargi le contexte de parties de \mathbb{Z}_n à une algèbre de polynômes.

Démonstration. La preuve repose sur le lemme ???. Observons que si $A \oplus B = \mathbb{Z}_n$, on a en termes de polynômes $A(1)B(1) = n$. Mais dans la décomposition en facteurs premiers de $A(1)B(1)$ figurent tous les $\Phi_d(1)$, qui valent 1 ou p (quand d est une puissance de p d'après le lemme ??). Le nombre premier p figure un nombre de fois égal au nombre de puissances de p qui divisent n , i.e. sa multiplicité dans n .

Donc les facteurs premiers de n apparaissent dans $A(1)B(1)$ sous la forme $\Phi_{p^\alpha}(1)$ et seulement sous cette forme. Les autres facteurs (cyclotomiques ou pas) de $A(X)$ (ou $B(X)$) contribuent seulement pour la valeur 1 quand $X = 1$, puisque tous les facteurs de n sont recensés.

La valeur de $A(1)$ est donc égale au seul produit des facteurs premiers p tels que Φ_{p^α} soit un facteur de $A(X)$: c'est bien la condition (T_1) . ♦

Notons sans insister, pour l'instant, qu'on ignore toujours aujourd'hui si la condition (T_2) est nécessaire **dans tous les cas** pour paver. Ce qui n'empêche pas d'utiliser qu'elle est suffisante : la prochaine version du logiciel *Open Music* d'aide à la composition et à l'analyse musicale intègrera un module qui permet de fabriquer des Canons rythmiques de période donnée, construits comme produits de facteurs cyclotomiques vérifiant la condition (T_2) .

Le prochain article de la série sera consacré à certains résultats personnels sur les Canons rythmiques que j'ai obtenu en travaillant dans les corps finis. Le suivant reprendra le contexte de $\mathbb{Z}[X]$, mais de façon plus poussée et plus technique, et mènera à certains résultats partiels sur la conjecture de FUGLEDE (ou conjecture spectrale) en dimension 1, mettant en évidence une liaison surprenante avec les canons de VUZA (i.e. factorisations de « mauvais groupes »).